



Universidad Nacional
de Mar del Plata

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Área Electrotecnia



Electrotecnia 2

Circuitos Trifásicos

Autor:

**Ingeniero Electricista y Laboral Gustavo L. Ferro – Prof. Adjunto Electrotecnia
EDICION 2019**

INDICE

Circuitos Trifásicos

- 1. Introducción**
- 2. Generación Trifásica**
- 3. Generador trifásico conectado en estrella (Y)**
- 4. Secuencia de fases**
- 5. Definiciones sobre la naturaleza de los sistemas**
- 6. Conexiones Básicas de las Cargas: conexión “ Δ ” y “Y”**
- 7. Tensiones y corrientes de línea y de fase**
- 8. Carga trifásica balanceada (equilibrada) conectada en Δ y en Y a un sistema tetrafilar. Equivalente monofásico**
- 9. Carga trifásica no balanceada (desequilibrada) conectada en Y a un sistema tetrafilar**
- 10. Carga trifásica no balanceada (desequilibrada) conectada en Y a un sistema trifásico de tres conductores (trifilar)**
- 11. Carga trifásica no balanceada (desequilibrada) conectada en Δ a un sistema trifásico tetrafilar**
- 12. Potencias en los sistemas trifásicos equilibrados**
- 13. Mejoramiento del factor de potencia en redes trifásicas**
- 14. Medición de potencias en sistemas trifásicos**

Archivo en la red

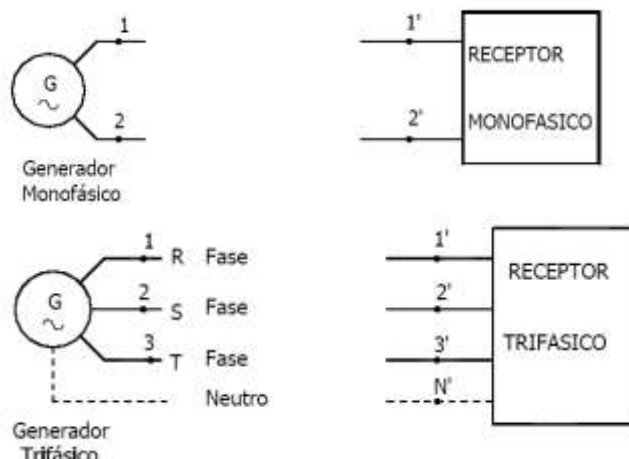
http://www3.fi.mdp.edu.ar/dtoelectrica/catedras_3e2.htm

1. Introducción

En el capítulo dedicado a estudiar los circuitos excitados por una tensión alterna se ha visto cómo se puede generar una tensión alterna senoidal, cuando una bobina se mueve dentro de un campo magnético.

La aparición de esta única onda alterna hace que se denomine a esta máquina **generador monofásico**.

Si el **número de bobinas en el rotor se incrementa de una forma especial**, el resultado es un **generador polifásico** que produce más de una onda alterna en cada revolución del rotor.

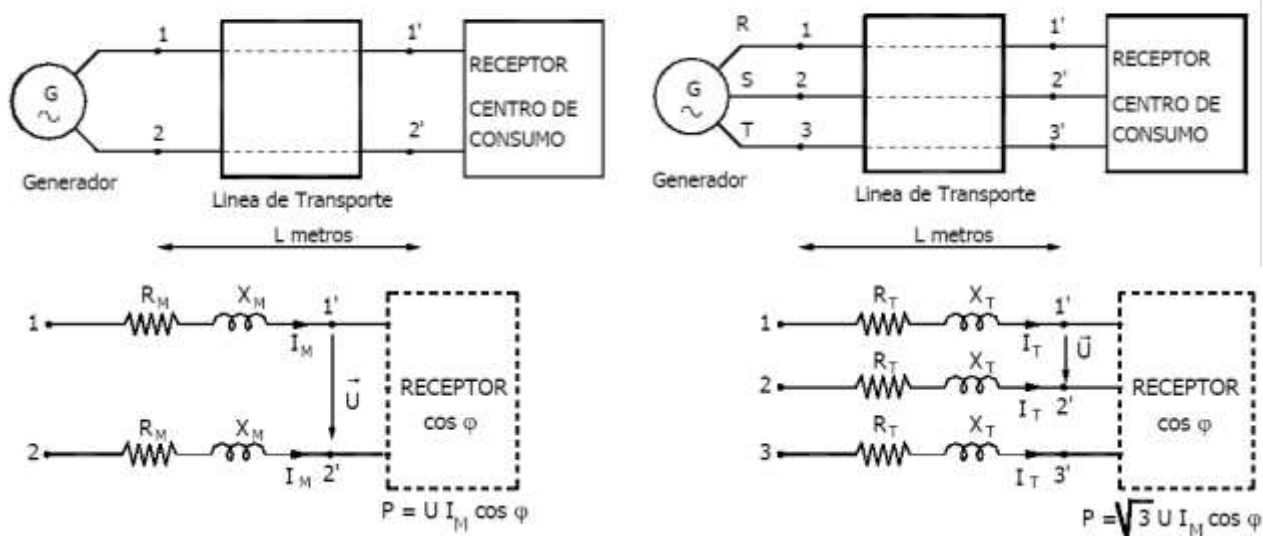


En este capítulo se estudiarán los **sistemas trifásicos** puesto que son los que con más frecuencia se utilizan en la **generación, transporte y distribución de la energía eléctrica**. Las instalaciones domésticas o de pequeña potencia son monofásicas, pero esto no supone más que una derivación del sistema trifásico. Existen también sistemas bifásicos que se emplean en servomecanismos, en aviones y barcos, para detectar y corregir señales de rumbo, indicación de alerones, etc.

En general, para la transmisión de potencia, los **sistemas trifásicos** son los preferidos sobre los sistemas de una fase o monofásicos, dado que presentan las siguientes **ventajas**:

a) Una línea monofásica sometida a una tensión U y recorrida por una intensidad I con un factor de potencia $\cos \varphi$, transmite una potencia media dada por: $P = U I \cos \varphi$. Si a esta línea le añadimos un tercer hilo tendremos una línea trifásica que transmite entonces una potencia $P_T = \sqrt{3} U I_T \cos \varphi$ (según se verá posteriormente). **Es decir, con un incremento de solo el 50% en el costo de los conductores de la línea, se aumenta la capacidad de transmisión de potencia en un 73 %.**

Ahora bien, si lo que se pretende es transportar una determinada energía a una cierta tensión el sistema trifásico es más económico que el sistema monofásico a igualdad de potencia a transmitir e igualdad en las pérdidas por efecto Joule en la línea, **ya que se obtiene un ahorro en peso de material conductor de un 25%.**



Ciertamente, si yo quiero alimentar a un receptor que consume una potencia P , que tiene un factor de potencia fijo, $\cos \varphi$, a una tensión dada, las pérdidas de energía P_p en la línea por efecto Joule serán:

- **Para el sistema monofásico:** $P_{PM} = 2 R_M I_M^2 = (2 \rho L / S_M) I_M^2$
- **Para el sistema trifásico:** $P_{PT} = 3 R_T I_T^2 = (3 \rho L / S_T) I_T^2$

Esto es debido a que la resistencia total de un hilo conductor de resistividad ρ , longitud “L” y sección “S”, vale $R = \rho L / S$.

Para una potencia consumida determinada, lógicamente si yo quiero sustituir un tipo de línea por otro, será considerando que las pérdidas sean iguales:

$$\frac{2\rho L}{S_M} I_M^2 = \frac{3\rho L}{S_T} I_T^2 \rightarrow \frac{2}{S_M} I_M^2 = \frac{3}{S_T} I_T^2$$

Debido a que se ha supuesto que estamos transportando la misma energía, de las formulas de la potencia monofásica y trifásica igualandolas se obtendrá que $I_M = \sqrt{3} I_T$, la cual sustituyéndola en la expresión anterior se obtendrá que:

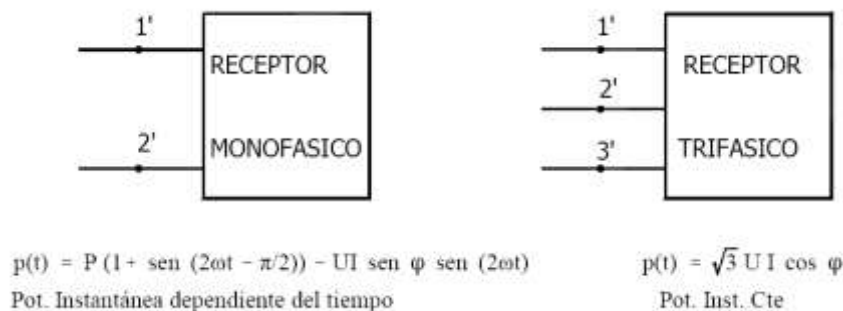
$$S_T = \frac{S_M}{2}$$

Con lo cual el volumen de material conductor en las diferentes líneas será:

- **Volumen línea trifásica:** $3 S_T L$
- **Volumen línea monofásica:** $2 S_M L = 4 S_T L$

Donde se puede observar que una línea trifásica, con las condiciones impuestas, el ahorro de peso en material conductor es del 25%.

b) La potencia instantánea de un sistema trifásico es constante independiente del tiempo lo que implica en los motores, de CA trifásicos, un par motor uniforme, lo que evita vibraciones y esfuerzo en el rotor de los motores de CA trifásicos.



c) Los motores TRIFASICOS pueden arrancar por sí mismos, sin embargo, los motores monofásicos necesitan de dispositivos especiales para conseguir su arranque.

d) Permite el empleo de los motores trifásicos asíncronos, que son los receptores más utilizados y son dentro del grupo de los motores los más económicos y robustos que se conocen.

Las técnicas utilizadas en la resolución de circuitos monofásicos estudiadas anteriormente pueden aplicarse directamente a los sistemas trifásicos. En muchos casos, los circuitos trifásicos se pueden reducir a esquemas monofásicos equivalentes, lo que facilita extremadamente los cálculos prácticos.

2. Generación Trifásica

Los generadores trifásicos tienen tres conjuntos de devanados, por esa razón producen tres voltajes de corriente alterna en lugar de uno.

Para captar la idea, considere primero el generador de una sola fase elemental de la figura 1a). Conforme gira la bobina AA' , produce una forma de onda sinusoidal $e_{AA'}$ como se indica en la figura 1b). El voltaje puede representarse mediante el fasor $E_{AA'}$ como se muestra en la figura 1c).

Si se agregan dos devanados más como se ve en la figura 2, se generan dos voltajes adicionales. Ya que estos devanados son idénticos a AA' (excepto por su posición en el rotor), producen idénticos voltajes.

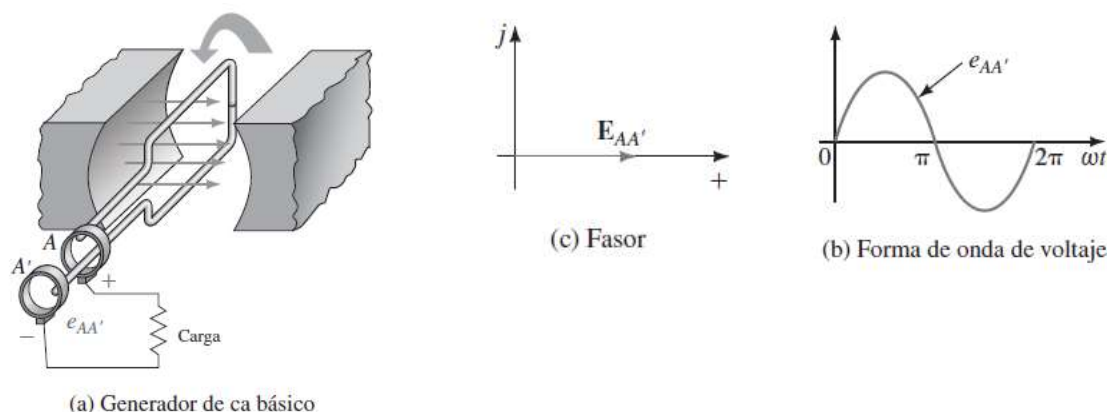


Figura 1. - Generador elemental monofásico

Sin embargo, ya que la bobina BB' está colocada 120° detrás de la bobina AA' , el voltaje $e_{BB'}$ se atrasa con respecto a $e_{AA'}$ por 120° , de manera similar, la bobina CC' , la cual está colocada después de la bobina AA' por 120° , produce un voltaje $e_{CC'}$ que se adelanta por 120° . Las formas de onda se muestran en b) y los fasores en c).

Como se indica, los voltajes generados son iguales en magnitud y están desplazados en fase 120° . Entonces, si $E_{AA'}$ está en 0° , entonces, $E_{BB'}$ estará en -120° y $E_{CC'}$ en $+120^\circ$.

Ejemplo: Si se supone un valor rms de 120 V y una posición de referencia de 0° para el fasor $E_{AA'}$, se obtiene $E_{AA'} = 120 \angle 0^\circ$, $E_{BB'} = 120 \angle -120^\circ$ y $E_{CC'} = 120 \angle 120^\circ$.

Tal conjunto de voltajes se dice que está balanceado. Debido a que estas relaciones entre voltajes balanceados son fijas, si se conoce un voltaje es fácil determinar los otros dos.

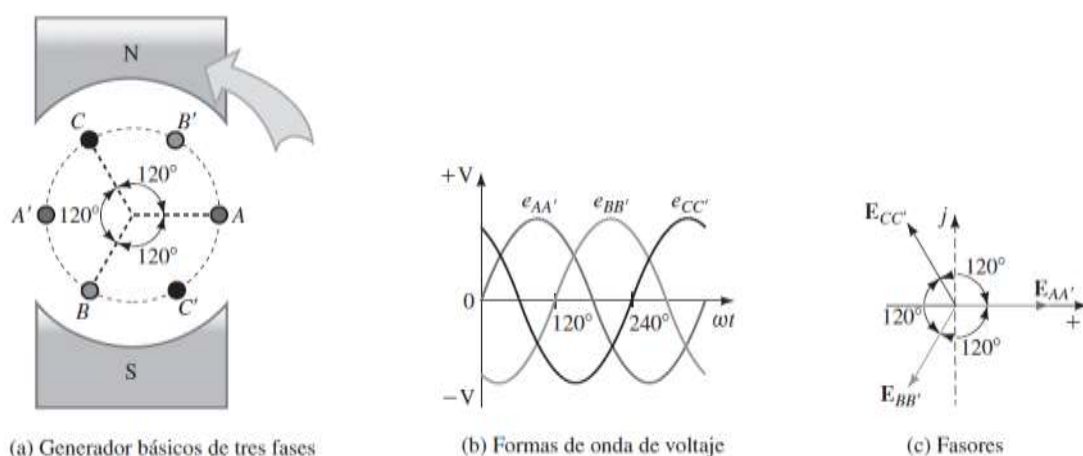


Figura 2. - Generación de voltajes trifásicos

Las expresiones instantáneas de estas tres tensiones son las siguientes:

$$u_{AA'}(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

$$u_{BB'}(t) = \sqrt{2} U \cos (\omega t - 120^\circ)$$

$$u_{CC'}(t) = \sqrt{2} U \cos (\omega t + 120^\circ)$$

Cada devanado en el que se produce una tensión sinusoidal se denomina **fase** y de ahí que el sistema aquí estudiado se denomine generador **trifásico**.

El conjunto de tensiones $E_{AA'}$, $E_{BB'}$ y $E_{CC'}$ constituye un sistema denominado **simétrico** ya que está formado por tres tensiones sinusoidales del mismo valor eficaz U (o amplitud máxima $U_m = \sqrt{2} U$), la misma **frecuencia** y **desfasados** 120° entre sí.

Obsérvese que en la figura 2 en cualquier instante de tiempo se cumple que:

$$u_{AA'}(t) + u_{BB'}(t) + u_{CC'}(t) = 0 \quad (1)$$

Es decir, la suma de los valores instantáneos de las tres tensiones es, en cada momento, iguala a cero. La equivalencia de la ecuación anterior en valores fasoriales es:

$$U_{AA'} + U_{BB'} + U_{CC'} = 0 \quad (2)$$

El generador trifásico de la figura 2, se representa generalmente por **tres generadores de tensión** con los valores señalados en las ecuaciones (1) o (2), de tal manera que cada uno de ellos se puede utilizar para alimentar sendas impedancias de carga: Z_A , Z_B y Z_C , tal como se muestra en la figura 3, en la que se han expresado los valores fasoriales de tensiones y corrientes.

El circuito trifásico de la figura 3 en el que cada fase del generador está unida a un receptor independiente de los demás y por medio de los conductores se denomina **circuito trifásico independiente**.

Es evidente que esta disposición requiere un total de seis conductores para transmitir la energía del generador a los receptores.

En el punto siguiente se analizará la conexión específica que reduce el número de conductores para unir el generador con la carga, haciendo más económico de este modo el transporte de energía.

En el circuito de la Figura 3 se dispone, de tres mallas independientes, dando lugar a una circulación de tres corrientes, que se calculan:

$$I_A = \frac{U_{AA'}}{Z_A}, \quad I_B = \frac{U_{BB'}}{Z_B}, \quad I_C = \frac{U_{CC'}}{Z_C}$$

Es evidente que si las tensiones generadoras forman un sistema simétrico y además se cumple la igualdad de las impedancias de carga: $Z_A = Z_B = Z_C = Z = Z \angle \varphi$

Entonces las corrientes serán todas iguales en valor absoluto, y desfasadas en el mismo ángulo φ respecto a las tensiones correspondientes y por lo tanto separadas 120° entre sí, tal como se muestra en la figura 4. De este modo los valores fasoriales de las corrientes suministradas por los generadores satisfacen la relación: $I_A + I_B + I_C = 0$

Si las impedancias de carga son diferentes en modulo y/o fase, las tres corrientes serán desiguales por lo que su suma será diferente de cero, se dice entonces que el receptor representa un sistema desequilibrado.

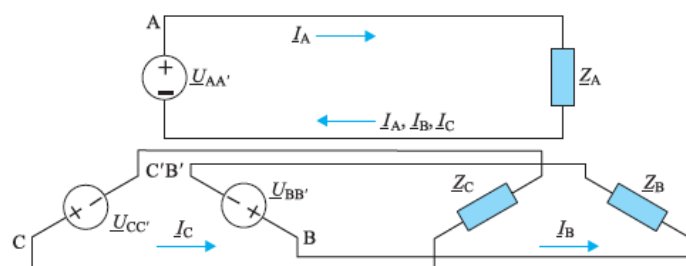


Figura 3. Alimentación independiente de tres cargas por medio de un generador trifásico

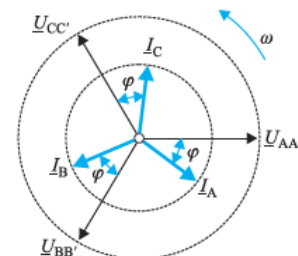


Figura 4. Fasores de tensión y corriente en un sistema trifásico equilibrado

3. Generador trifásico conectado en estrella

Si las tres terminales de la figura 1, denotadas con A', B' y C' son conectadas entre sí formando el nodo indicado con "N", al generador se le denomina **generador trifásico conectado en estrella "Y"**, como se indica en la figura 5.

El punto en que todas las terminales están conectadas se denomina **punto neutro**.

Si un conductor no está unido desde este punto hasta la carga, el sistema se denomina **generador trifásico de tres conductores conectado en Y**.

Si el neutro está conectado, el sistema es un **generador trifásico de cuatro conductores conectado en Y**.

La función del neutro será discutida con todo detalle cuando consideremos el circuito de carga.

Los tres conductores conectados desde A, B y C hasta la carga son llamados "**líneas**". Para el sistema conectado en Y, a partir de la figura 4 debe resultar obvio que la **corriente de línea** es igual a la **corriente de fase** para cada fase; es decir: $I_L = I_{\phi}$. Donde ϕ se usa para denotar una cantidad de fase y g es un parámetro del generador.

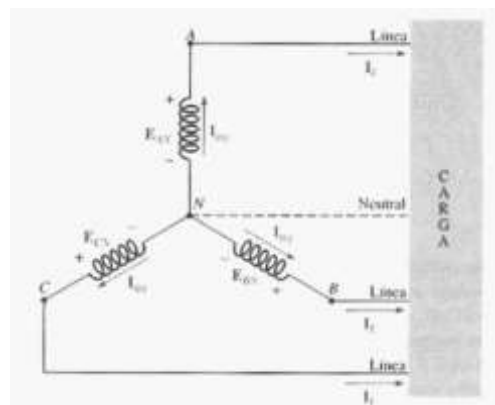


Figura 5. - Generador Trifásico conectado en Y

4. Secuencia de fases

La secuencia de fases se refiere al orden en el cual ocurren los voltajes trifásicos. Esto se puede ilustrar en términos de fasores.

Si vemos la figura 6, la rotación del conjunto de fasores se produce en el orden ABCABC...

Esta secuencia se conoce como **secuencia de fase ABC o secuencia de fase positiva**.

El sentido de giro de los fasores se tomará siempre en sentido antihorario, por ser este el internacionalmente establecido por convención.

Por otro lado, si la dirección de rotación se invierte, la secuencia es ACB **esta se llama secuencia de fase negativa**.

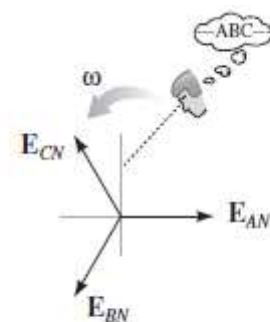


Figura 6. Ilustración de la secuencia de fases

Para abordar la resolución de problemas se deberá especificar la secuencia de fases de la alimentación, en caso de omitirse se considerará que la misma es positiva, ya que los sistemas de potencia generan esta secuencia.

En la figura 7 se representan los fasores de tensiones de dos sistemas trifásicos. El esquema de la figura 7 a) corresponde a un sentido de sucesión de fases A, B, C.

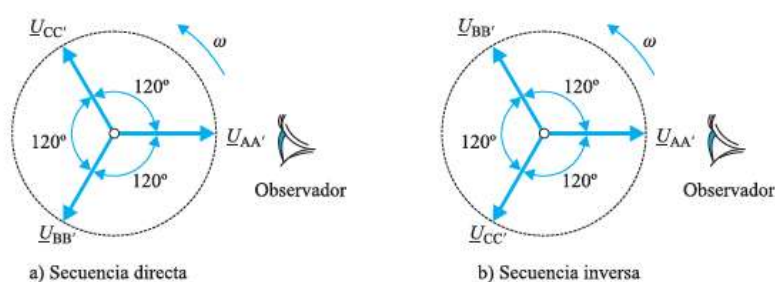


Figura 7. Fasores trifásicos de tensiones de secuencia directa y secuencia inversa

Téngase en cuenta que los fasores giran a una velocidad angular " ω " en el sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que un observador situado en una posición fija (por ejemplo, el eje real) verá pasar los fasores en el orden ABC, mientras que en el caso de la figura 7b) la secuencia será ACB.

La secuencia de fases es de vital importancia en los sistemas de distribución de energía eléctrica, ya que determinan el sentido de rotación de los motores trifásicos. Por ejemplo, si se intercambian dos tensiones de fase, se cambiará la secuencia, por lo que se invertirá el sentido de giro del motor.

En virtud de lo expresado, adoptando como referencia la tensión de línea y una secuencia determinada, quedan automáticamente definidas las tensiones de línea y las tensiones de fase correspondientes.

A modo de ejemplo, si adoptamos **como referencia la tensión de línea V_{BC}** las tensiones restantes quedan definidas la siguiente manera:

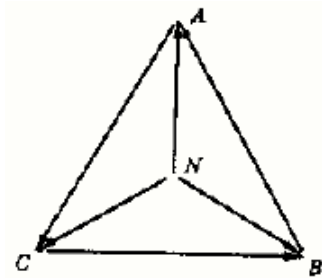
Secuencia directa (ABC) o secuencia 1

Tensiones de línea:

$$\begin{aligned} V_{BC} &= V_L \angle 0^\circ \text{ (referencia)} \\ V_{AB} &= V_L \angle +120^\circ \\ V_{CA} &= V_L \angle -120^\circ \end{aligned}$$

Tensiones de fase:

$$\begin{aligned} V_{AN} &= V_L / \sqrt{3} \angle 90^\circ \\ V_{BN} &= V_L / \sqrt{3} \angle -30^\circ \\ V_{CN} &= V_L / \sqrt{3} \angle -150^\circ \end{aligned}$$



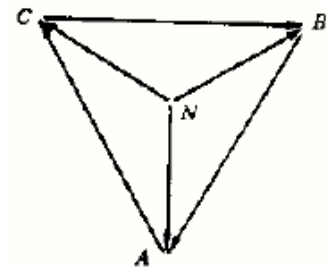
Secuencia indirecta (ACB) o secuencia 2

Tensiones de línea:

$$\begin{aligned} V_{BC} &= V_L \angle 0^\circ \\ V_{AB} &= V_L \angle -120^\circ \\ V_{CA} &= V_L \angle +120^\circ \end{aligned}$$

Tensiones de fase:

$$\begin{aligned} V_{AN} &= V_L / \sqrt{3} \angle -90^\circ \\ V_{BN} &= V_L / \sqrt{3} \angle 30^\circ \\ V_{CN} &= V_L \angle 150^\circ \end{aligned}$$



5. Definiciones sobre la naturaleza de los sistemas. Simetría y equilibrio.

Se dice que un sistema polifásico es **perfecto**, cuando tratándose de alternadores trifásicos se generan **tensiones idénticas en “amplitud” con “iguales desfases entre ellas”**

Para los sistemas trifásicos podemos citar algunas definiciones interesantes:

a) Simetría: La simetría de un sistema trifásico se refiere a los módulos y a las fases del mismo.

- Un sistema es **simétrico en módulo** cuando los correspondientes a todas las fases son iguales entre sí, denominándose “regular”, luego: $|U_{RN}| = |U_{SN}| = |U_{TN}|$
- Un sistema es **simétrico en fase** cuando todas sus componentes están desfasadas el mismo ángulo, denominándose “propio”, entonces: $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$
- Cuando un sistema reúne ambas simetrías o sea es regular y propio, se dice que es **perfecto**.

SISTEMA TRIFÁSICO PERFECTO es todo sistema trifásico que cumple simultáneamente las condiciones de propio y regular.

b) Equilibrio: Se dice que un sistema trifásico es equilibrado cuando la suma de sus componentes es igual a cero.

$$\begin{aligned} \sum U_i &= 0 \text{ refiriéndose a tensiones o bien} \\ \sum I_i &= 0 \text{ refiriéndose a corrientes.} \end{aligned}$$

c) Propiedad de los sistemas perfectos: “Todo sistema trifásico PERFECTO es equilibrado”

6. Conexiones Básicas de las Cargas Trifásicas: conexión triángulo “Δ” y en estrella “Y”

Las cargas (receptores) trifásicas pueden tener dos tipos de conexión: la denominada **conexión en triángulo “Δ”** que está representada en la figura 8, o la **conexión en estrella “Y”** ejemplificada en la figura 9.

Además, las cargas más allá de la conexión pueden ser **balanceadas o equilibradas** cuando las tres impedancias que la componen son iguales o **desequilibradas** cuando no se cumple dicha condición.

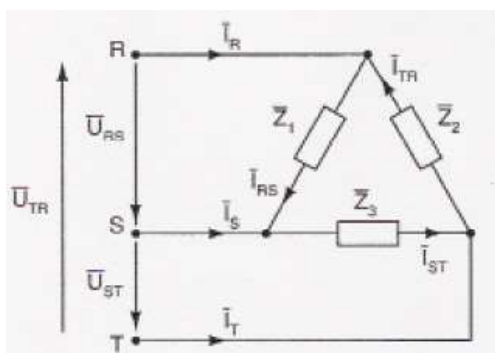


Figura 8

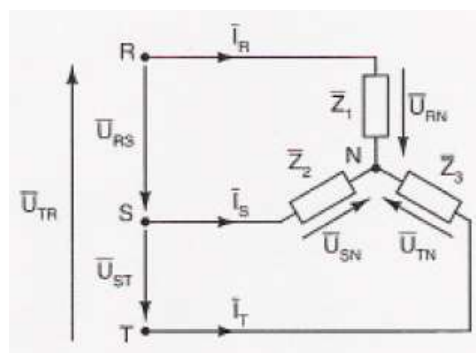


Figura 9

Si la carga está balanceada (equilibrada), la conexión neutra puede eliminarse sin que el circuito se vea afectado de ninguna manera; esto es, si: $Z_1 = Z_2 = Z_3$, entonces I_N será cero.

Una carga balanceada (equilibrada) es aquella en la que las impedancias de las fases son iguales en magnitud y en fase.

En la práctica, por ejemplo, si una fábrica tiene solo cargas trifásicas balanceadas, la ausencia del neutro no tendría efecto ya que, idealmente, el sistema siempre estaría balanceado. El costo de la instalación, por lo tanto, sería menor ya que el número de conductores requeridos se reduciría. Sin embargo, la iluminación y la mayor parte de otros equipos eléctricos usarán sólo uno de los voltajes de fase, y aún si la carga está diseñada para ser balanceada (como debe ser), nunca se tendrá un balanceo perfecto ya que las luces y otros equipos se encenderán y apagaran aleatoriamente, perturbando la condición de balanceo.

El neutro es, por tanto, necesario para llevar la corriente resultante lejos de la carga y de regreso al generador conectado en Y

Un sistema trifásico de 4 hilos (tetrafilar) permitirá la conexión de cargas:

- a) Entre fase y neutro
- b) Entre fases
- c) Cargas trifásicas (como se indicó anteriormente)

En las figuras que siguen pueden verse la realización de las conexiones indicadas.

En la **Figura 10** se indica la conexión de una **carga MONOFASICA** entre fase y neutro (tensión simple) y entre fase y fase (tensión compuesta)

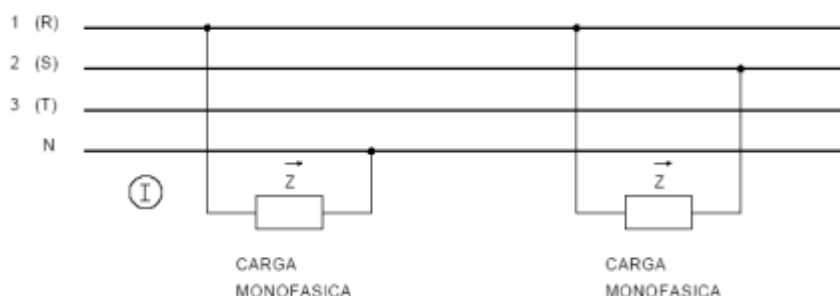


Figura 10

En la **Figura 11** se ha representado una **carga trifásica conectada es ESTRELLA** cuyo punto neutro está unido al conductor neutro del sistema. Asimismo, se ofrece una conexión trifásica sin unión a neutro a través de un conjunto de cargas agrupadas en **TRIANGULO**.

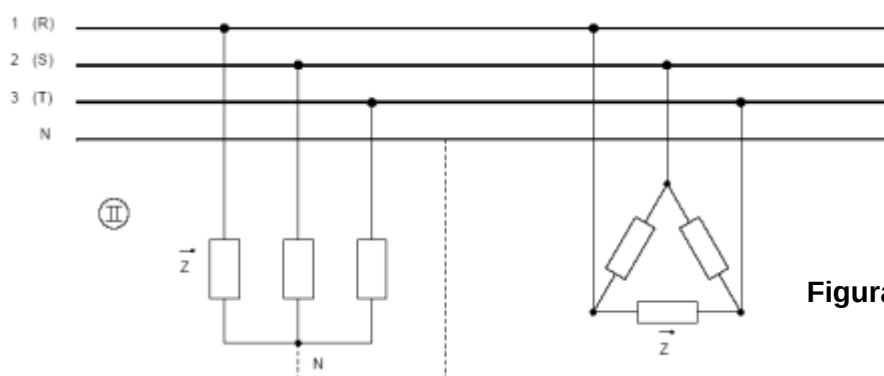


Figura 11

7. Tensiones y corrientes de línea y de fase.

7.1. Tensiones de línea y de fase

Para el caso de impedancias en triángulo es evidente que la conexión a las “líneas” hará que las tensiones impresas a cada una de las impedancias Z_{Δ} será una composición de tensiones de fase.

Las tensiones que aparecen entre las líneas se llamarán “**tensiones compuestas**” o de “**línea**” (V_L) y sus valores de módulos y argumentos resultan de analizar la **Figura 12**.

Considerando una secuencia positiva (ABC) para las tensiones de fase resultará: $E_{AB} = E_{AN} - E_{BN} = E_{AN} + E_{NB}$

Donde definimos: $E_{AB} = V_{\text{Línea}} =$ tensión de línea y $E_{AN} = V_{\text{Fase}} =$ tensión de fase. De un simple análisis geométrico, resulta: $V_{\text{línea}} / 2 = V_{\text{fase}} \cos 30^\circ = V_{\text{fase}} \sqrt{3}/2$

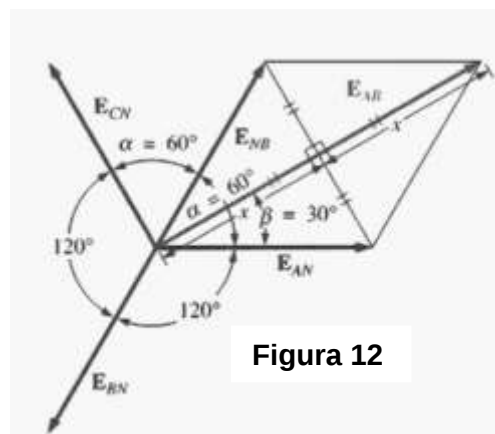


Figura 12

$$V_{\text{línea}} = V_L = \sqrt{3} V_{\text{fase}}$$

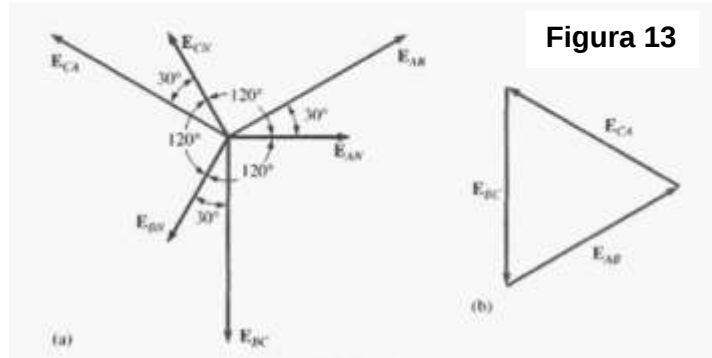
Si realizamos el mismo razonamiento para las tensiones E_{BC} y E_{CA} , la terna de tensiones compuestas puede ser escritas como:

$$E_{AB} = \sqrt{3} E_{RN} \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ; E_{BC} = \sqrt{3} E_{SN} \angle -90^\circ = V_L \angle 270^\circ; E_{CA} = \sqrt{3} E_{TN} \angle -210^\circ = V_L \angle 150^\circ$$

El diagrama fasorial de los voltajes de línea y de fase se muestra en la Figura 13.

Si los fasores que representan los voltajes de línea en la figura 13(a) se reordenan ligeramente, formarán un lazo cerrado [Figura 13 (b)].

Por tanto, podemos concluir que la suma de los voltajes de línea es también cero; es decir: $E_{AB} + E_{CA} + E_{BC} = 0$.



7.2. Corrientes de línea y de fase

Evidentemente tres impedancias “Z” idénticas al conectarse a una terna perfecta de tensiones, poseerán **corrientes de fase diferentes según las configuraciones sean estrella o triángulo**.

Un razonamiento análogo al realizado con las tensiones de línea y de fase, puede hacerse con las corrientes de línea y de fase para una carga conectada en estrella y en triángulo.

a) Carga equilibrada en triángulo

Considerando la figura 8 y aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff en los nodos R, S y T, las corrientes de línea pueden expresarse en términos de las corrientes de fase, de la siguiente manera:

$$I_R = I_{RS} - I_{TR} \quad I_S = I_{ST} - I_{RS} \quad I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

Donde las corrientes de fase pueden calcularse por aplicación de la ley de Ohm sobre cada impedancia que constituye la carga, es decir: $I_{fase} = V_L / Z$.

En la figura 14 se representa el diagrama fasorial de las corrientes de fase y de línea para una carga conectada en triángulo. En la misma se pone de manifiesto la relación existente entre ellas.

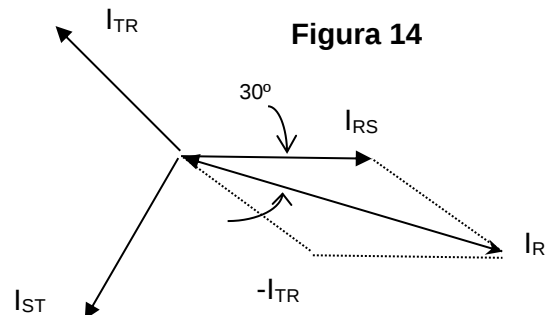
$$I_R = I_{RS} - I_{TR} = I_{RS} + (-I_{TR})$$

$$I_R = I_{RS} \angle 0^\circ + I_{RS} \angle -60^\circ =$$

$$I_R = I_{RS} [1 + (0,5 - j\sqrt{3}/2)] = I_{RS} (1,5 - j\sqrt{3}/2) = I_{RS} \sqrt{3} \angle -30^\circ$$

$$I_{LINEA} = \sqrt{3} I_{FASE} \angle -30^\circ$$

$$I_L = \sqrt{3} I_{FASE}$$



Igual que para los voltajes de línea es posible mostrar de la suma fasorial de las corrientes de fase para sistemas conectados en Δ con cargas balanceadas es cero ($\sum I_{fase} = 0$)

b) Carga equilibrada en estrella

Considerando la figura 9, correspondiente a una carga conectada en estrella, vemos que las corrientes que circulan por las líneas I_R , I_S e I_T son las mismas que circulan por la carga atento la configuración de la misma.

Por lo tanto, para una carga equilibrada conectada en estrella se deberán determinar las corrientes de línea a partir de las tensiones de fase impuestas por el generador y las impedancias de carga, aplicando la ley de Ohm.

A título de síntesis se podrá decir:

- ✓ En un sistema de “cargas equilibradas en Y” se verifica: $I_{\text{línea}} = I_{\text{fase}}$; $V_{\text{línea}} = \sqrt{3} V_{\text{fase}}$
- ✓ En un sistema de “cargas equilibradas en Δ ” se cumple: $V_{\text{línea}} = V_{\text{fase}}$; $I_{\text{línea}} = \sqrt{3} I_{\text{fase}}$

En todos los casos el factor de amplitud entre los valores simples y compuestos será de $\sqrt{3} = 1,73205$, si es que no existen diferencias entre los módulos de las amplitudes.

Lo anterior es válido para cargas balanceadas y un sistema perfecto de tensiones de generación.

8. Carga trifásica balanceada (equilibrada) conectada “ Δ ” y en “Y” a un sistema trifásico tetrafilar.

8.1 Carga balanceada (equilibrada) en “ Δ ”

En la **figura 15** se representa la conexión de una carga balanceada (equilibrada) conectada en Δ donde se cumple que: $Z_{RS} = Z_{ST} = Z_{TR} = Z_{\Delta}$.

Para determinar las corrientes de línea, se deberán primero calcular las corrientes de fase indicadas como I_{RS} , I_{ST} e I_{TR} .

Las corrientes de fase resultan de aplicar la ley de Ohm como:

$$I_{RS} = V_{RS} / Z_{RS} = V_{RS} / Z_{\Delta}$$

$$I_{ST} = V_{ST} / Z_{\Delta}$$

$$I_{TR} = V_{TR} / Z_{\Delta}$$

Las corrientes de línea aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff en los nodos indicados como R, S y T en la figura 15, resultan:

$$I_R = I_{RS} - I_{TR}$$

$$I_S = I_{ST} - I_{RS}$$

$$I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

En la figura 16 se representa el diagrama fasorial donde se ponen de manifiesto las relaciones indicadas anteriormente.

Obsérvese que dado que la conexión en triángulo no admite la conexión del neutro no se han indicado las tensiones de fase o simples en el diagrama, representándose las tensiones de línea, por ser las tensiones que tienen aplicadas dada impedancia de carga.

8.1.1. Ejemplo numérico de carga equilibrada conectada en triángulo o “ Δ ”

Un sistema trifásico con secuencia de fases ABC (secuencia directa) de tres conductores y **tensión de línea** igual a 110 V alimenta a una carga conectada en triángulo de **tres impedancias iguales** de $5 \angle 45^\circ \Omega$. Determinar las intensidades de corriente en las líneas I_A , I_B e I_C y dibujar el diagrama fasorial.

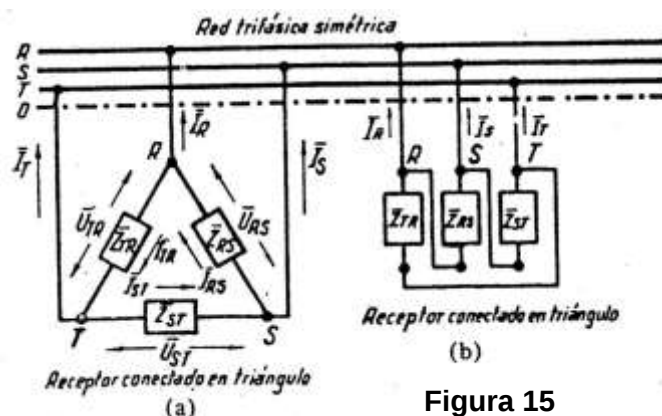


Figura 15

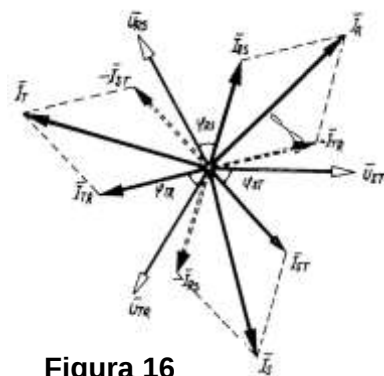


Figura 16

✓ **Resolución:** Se elige una terna de tensiones de línea, que determinan los sentidos de las corrientes de fase indicados en el diagrama.

Las tensiones de línea serán:

$$V_{AB} = 110 \angle 120^\circ \quad V_{BC} = 110 \angle 0^\circ \quad V_{CA} = 110 \angle 240^\circ$$

Aplicando la Ley de Ohm las corrientes de fase resultan:

$$I_{AB} = V_{AB} / Z = 110 \angle 120^\circ / 5 \angle 45^\circ = 22 \angle 75^\circ$$

$$I_{BC} = 22 \angle -45^\circ$$

$$I_{CA} = 22 \angle 195^\circ$$

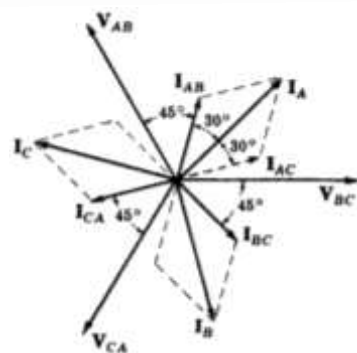
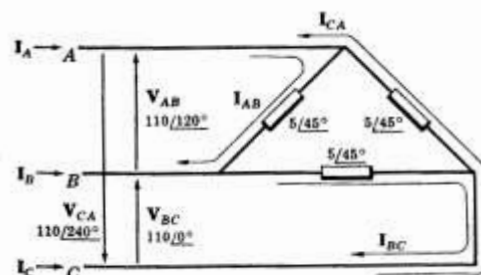
Aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff a cada nodo del triángulo de carga, las corrientes de línea resultan:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 38,1 \angle 45^\circ$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} = 38,1 \angle -75^\circ$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = 38,1 \angle 165^\circ$$

Nota: En una carga conectada en triángulo la tensión compuesta entre líneas y la simple de fase son iguales y la corriente en la línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que la corriente en la fase y tiene un ángulo en atraso de 30° con respecto a la corriente de fase respectiva.



8.2. Carga equilibrada conectada en “Y”

En la figura 17 se representa la conexión de una carga balanceada (equilibrada) conectada en Y donde se cumple que: $Z_R = Z_S = Z_T = Z_Y$.

Para la conexión en estrella se cumple que las **corrientes de línea coinciden con las corrientes de fase** $I_L = I_F$, ya que la misma corriente recorre las líneas y las cargas.

Luego las corrientes de línea I_R , I_S e I_T se determinarán por aplicación de la ley de Ohm, dado que la tensión aplicada a cada carga es igual a la tensión de fase, es decir la medida entre cada conductor activo y el neutro.

Como se demostró al definir las tensiones de fase y de línea la relación existente entre ellas es: $V_L = \sqrt{3} V_F$, con un ángulo de 30° en adelante entre la tensión de línea y la de fase más cercana.

Las expresiones para calcular las corrientes de línea serán:

$$I_R = V_{RN} / Z \quad I_S = V_{SN} / Z \quad I_T = V_{TN} / Z$$

El diagrama fasorial puede verse en la figura 18.

Por ser la carga equilibrada se cumple que la corriente de neutro I_0 es igual a cero, como podrá verificarse en el ejemplo numérico siguiente.

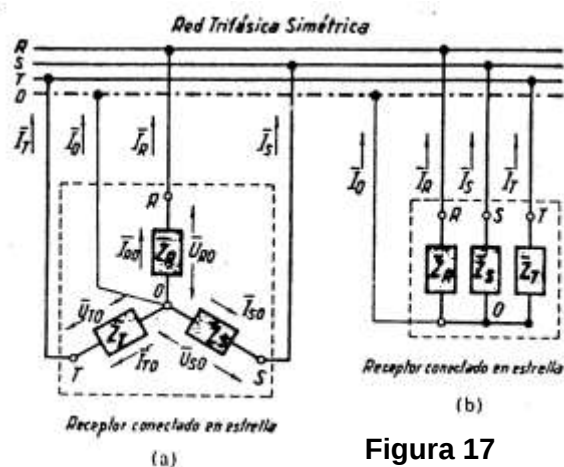


Figura 17

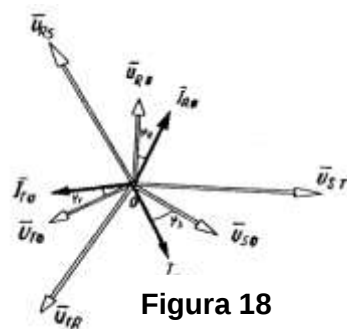


Figura 18

8.2.1. Ejemplo N.º 2: Carga equilibrada conectada en estrella

Un sistema trifásico CBA (secuencia inversa) de cuatro conductores y 208 V de tensión de línea alimenta a una carga equilibrada conectada en estrella con impedancias de $20 \angle 30^\circ \Omega$. Hallar las corrientes en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

✓ **Resolución:** Definimos las tensiones de fase y elegimos las corrientes de línea como se indica en la figura:

$$V_{AN} = 120 \angle -90^\circ \quad V_{BN} = 120 \angle 30^\circ \quad V_{CN} = 120 \angle 150^\circ$$

Las corrientes de línea serán:

$$I_A = V_{AN} / Z = 6 \angle -60^\circ$$

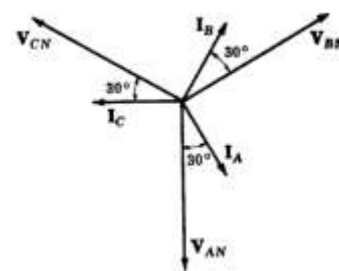
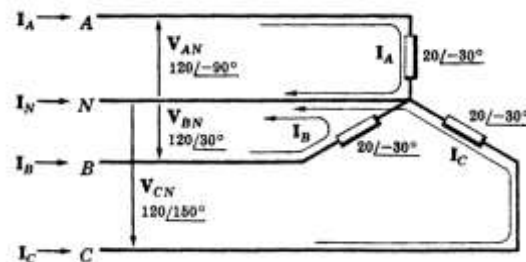
$$I_B = V_{BN} / Z = 6 \angle 60^\circ$$

$$I_C = V_{CN} / Z = 6 \angle 180^\circ$$

La corriente por el neutro valdrá: $I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 0$

El diagrama fasorial puede verse en la figura.

Nota: En una carga equilibrada conectada en estrella las corrientes en las líneas en las fases son iguales. La corriente en el neutro es cero y la tensión compuesta entre líneas es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión simple de fase, es decir $V_L = \sqrt{3} V_F$.



8.3. Carga equilibrada conectada en Y o Δ . Circuito monofásico equivalente.

El **circuito equivalente monofásico** está formado por una fase del circuito trifásico de cuatro conductores, conectado en estrella, como el indicado en la Figura 19, con una tensión que tiene el módulo de la **tensión simple de fase y un ángulo de fase nulo** y el retorno por el conductor neutro (Figura 20).

La corriente de línea calculada para este circuito tiene el ángulo de fase respecto del ángulo cero de la tensión.

Consideremos un ejemplo aplicar el concepto de equivalente monofásico.

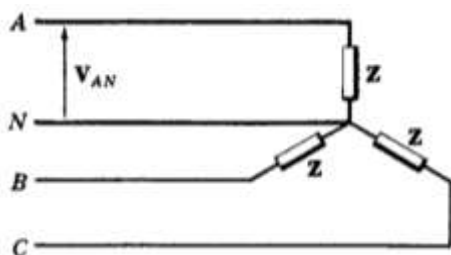


Figura 19

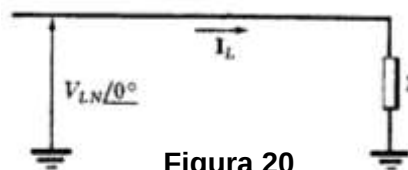


Figura 20

8.3.1. Ejemplo de carga equilibrada conectada en triángulo. Equivalente monofásico.

Consideremos el ejemplo del punto 8.1.1 correspondiente a una carga equilibrada conectada en triángulo, el cual lo resolveremos por el método del equivalente monofásico.

Como primer caso deberemos transformar la carga en triángulo a una estrella equivalente utilizando la transformación $\Delta - Y$.

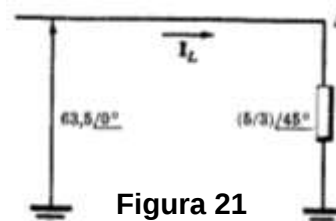


Figura 21

En la figura 21 dibujamos el circuito equivalente donde se ha indicado la carga en Y equivalente.

La impedancia en estrella equivalente valdrá: $Z_Y = Z_\Delta / 3 = (5/3) \angle 45^\circ$ y la tensión de fase es $V_{LN} = V_L / \sqrt{3} = 110 / \sqrt{3} = 63,5 \text{ V}$.

La corriente de línea es: $I_L = V_L / Z = 63,5 \angle 0^\circ / (5/3) \angle 45^\circ = 38,1 \angle -45^\circ$

Puesto que esta corriente retrasa respecto de sus correspondientes tensiones, V_{AN} , V_{BN} y V_{CN} en 45° . Seguidamente se dan las tensiones simples a neutro y las corrientes correspondientes.

$$V_{AN} = 63,5 \angle 90^\circ \quad V_{BN} = 63,5 \angle -30^\circ \quad V_{CN} = 63,5 \angle 150^\circ$$

$$I_A = 38,1 \angle 90^\circ - 45^\circ = 38,1 \angle 45^\circ, I_B = 38,1 \angle -75^\circ, I_C = 38,1 \angle -195^\circ$$

Estas intensidades de corriente son idénticas a las que se obtuvieron en el ejemplo 8.1.1. Si se desean las corrientes de fase en las impedancias conectadas en triángulo, se pueden obtener a partir de la expresión $I_F = I_L / \sqrt{3} = 38,1 / \sqrt{3} = 22$. Los ángulos de fase de estas corrientes se deducen estableciendo primero los ángulos de las tensiones compuestas entre líneas, determinando después las corrientes con un retraso de 45° .

$$V_{AB} = 110 \angle 120^\circ \quad V_{BC} = 110 \angle 0^\circ \quad V_{CA} = 110 \angle 240^\circ$$

$$I_{AB} = 22 \angle 120^\circ - 45^\circ = 22 \angle 75^\circ, I_B = 22 \angle 0^\circ - 45^\circ = 22 \angle -45^\circ, I_C = 22 \angle 240^\circ - 45^\circ = 22 \angle 195^\circ$$

9. Carga trifásica no balanceada (desequilibrada) conectada en Y a un sistema tetrafilar.

Generalmente en la práctica, los sistemas trifásicos están sensiblemente equilibrados, bien porque muchas de las cargas son trifásicas en sí mismas (como los motores trifásicos), o bien porque cuando existen cargas monofásicas, éstas se han repartido equitativamente entre las tres fases; de este modo, una gran parte de los problemas de circuitos trifásicos se puedan resolver por los procedimientos vistos hasta ahora.

Cuando las cargas dejan de ser iguales en las tres fases, se obtiene un sistema desequilibrado que debe resolverse simultáneamente para las tres fases, sin que pueda considerarse un circuito equivalente monofásico, porque las ecuaciones correspondientes han perdido sus condiciones de simetría.

En las **redes desequilibradas es muy importante conocer la secuencia de fases**, ya que un cambio en la secuencia puede dar lugar a un reparto de las corrientes de línea completamente distinto, aun cuando las tensiones de alimentación y las cargas se mantengan iguales.

En lo que sigue vamos a estudiar los circuitos trifásicos con cargas desequilibradas, suponiendo como es habitual, que el sistema de alimentación es perfecto.

Para analizar los sistemas no simétricos (desequilibrados), tanto en generación como en cargas, se utiliza una técnica denominada **“método de las componentes simétricas”** que permite hacer un estudio más general, convirtiendo un sistema no simétrico en simétrico, lo cual es muy útil, para analizar fallas o cortocircuitos en sistemas de potencia.

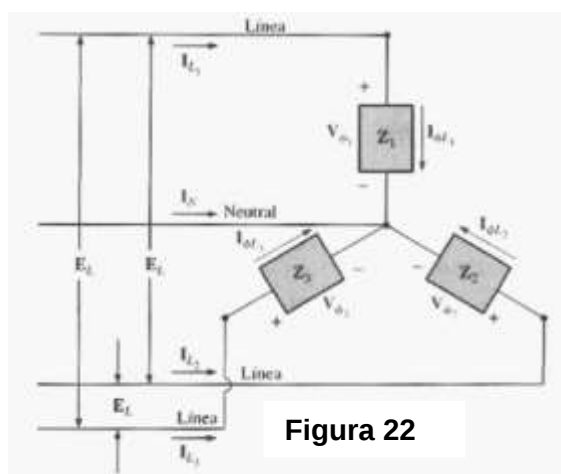


Figura 22

Las condiciones para la carga trifásica conectada en Y, en sistemas tetrafilares o de cuatro conductores, que aparece en la figura 22, son de tal naturaleza que **ninguna** de las impedancias de carga es iguales, por lo que tenemos una **carga trifásica no balanceada o desequilibrada**.

Como el neutro es un punto común entre la carga y la fuente, sin importar cuál sea la impedancia de cada fase de la carga y la fuente, el voltaje en cada fase es el voltaje de fase del generador: $V_{\phi} = E_{\phi}$

Las corrientes de fase pueden, por tanto, determinarse mediante la Ley de Ohm:

$$I_{\phi} = \frac{V_{\phi 1}}{Z_1} = \frac{E_{\phi 1}}{Z_1} \text{ y así sucesivamente con las otras fases}$$

Para cualquier sistema no balanceado, la corriente en el neutro puede encontrarse entonces aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el punto común n:

$$I_N = I_{\phi 1} + I_{\phi 2} + I_{\phi 3} = I_{L1} + I_{L2} + I_{L3}$$

Debido a la diversidad de equipos que se encuentran en el ambiente industrial, la potencia trifásica y la monofásica se proporcionan, por lo general, con la monofásica obtenida del sistema trifásico. Además, como la carga de cada fase cambia en forma continua, normalmente se emplea un sistema de cuatro conductores (con un neutro) para asegurar niveles de voltaje uniformes, y con el fin de proporcionar una trayectoria para la corriente resultante de una carga no balanceada.

Todas las cargas que demandan las potencias más bajas, como la iluminación, los tomacorrientes, los sistemas de alarma, etc., usan una línea monofásica de 220 V como voltaje de fase, correspondientes a un sistema trifásico cuya tensión de línea vale 380 V; mientras que los grandes motores o las cargas más grandes se conectan a la línea trifásica.

El sistema trifásico a cuatro hilos es muy empleado en las redes de distribución de baja tensión para suministro de energía eléctrica en locales comerciales, pequeñas industrias e instalaciones domésticas.

En la figura 23 que sigue se representa el esquema de la instalación eléctrica de una pequeña industria.

La acometida general constituye la fuente generadora que proporciona la empresa suministradora. Inmediatamente después de la entrada del cable de 4 hilos al edificio se colocan unos fusibles en todas las fases de la red para protegerla contra cortocircuitos.

Entre las diferentes fases de entrada y el hilo neutro se distribuyen las cargas de alumbrado que son del tipo monofásico.

Se debe procurar repartir estas cargas entre las diferentes fases, intentando conseguir un sistema equilibrado (por ejemplo, en el caso de que sean cargas de iluminación, incluyendo el mismo número de lámparas de la misma potencia por fase). Los motores eléctricos trifásicos se conectan a las tres fases y constituyen por sí mismos cargas equilibradas ya que solicitan corrientes idénticas (en módulo) para todas las fases.

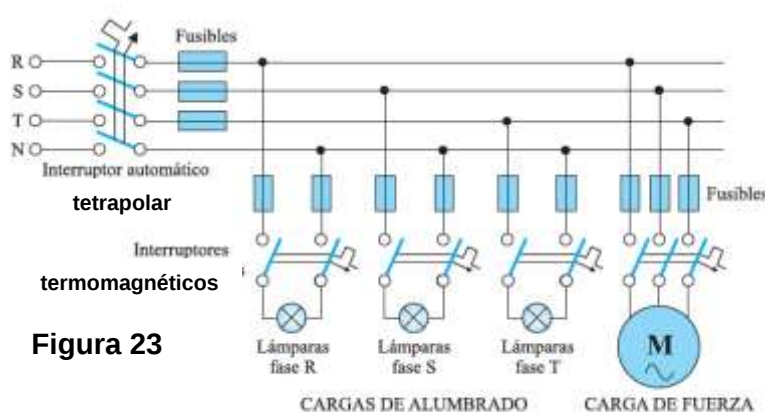
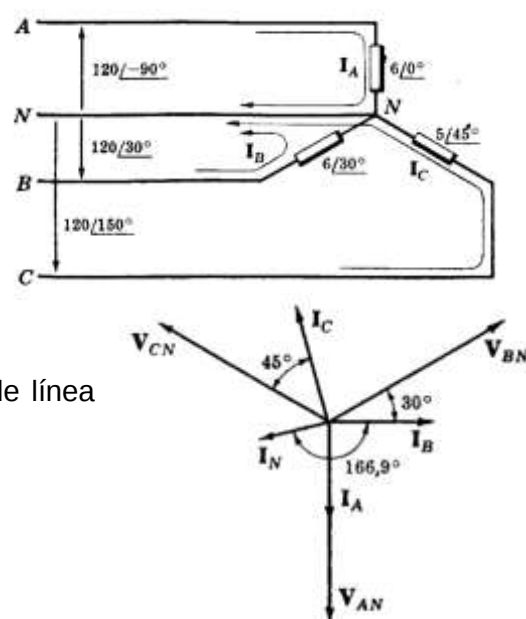


Figura 23

9.1. Ejemplo de carga desequilibrada conectada en estrella “Y” a un sistema tetrafilar.

Un sistema trifásico de secuencia CBA (secuencia inversa) de cuatro conductores y 208 V de tensión de línea alimenta una carga en estrella con impedancias: $Z_A = 6 \angle 0^\circ$; $Z_B = 6 \angle 30^\circ$ y $Z_C = 5 \angle 45^\circ$. Obtener las tres corrientes en las líneas y en el neutro. Dibujar el diagrama fasorial.



• Resolución

Definimos las tensiones de fase y elegimos las corrientes de línea como se indican en la figura:

$$V_{AN} = 120 \angle -90^\circ \quad V_{BN} = 120 \angle 30^\circ \quad V_{CN} = 120 \angle 150^\circ$$

Las corrientes de línea serán:

$$I_A = V_{AN} / Z_A = 20 \angle -90^\circ$$

$$I_B = V_{BN} / Z_B = 20 \angle 0^\circ$$

$$I_C = V_{CN} / Z_C = 24 \angle 105^\circ$$

La corriente por el neutro valdrá: $I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 14,1 \angle -166,9^\circ$. El diagrama fasorial podemos verlo en la figura.

9.2 Carga trifásica desequilibrada conectada en Y con el centro de estrella conectado a tierra a través de una impedancia a un sistema simétrico de generación.

Supongamos un circuito como el indicado en la figura 24, compuesto por tres generadores monofásicos conectados en estrella, con el centro de estrella conectado a tierra, que constituyen un sistema trifásico simétrico de generación (tres tensiones iguales en modulo y desfasadas en mismo ángulo), una línea trifásica equilibrada representadas por las impedancias Z_P que permiten conectar el generador con una carga desequilibrada conectada en estrella (Z_A, Z_B, Z_C), donde el centro de estrella se conecta a tierra mediante una impedancia Z_N .

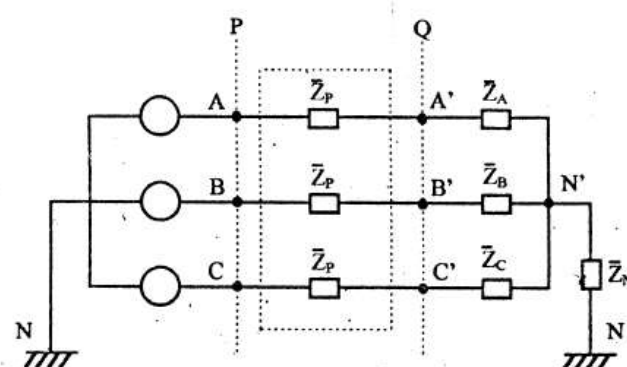


Figura 24

En este sistema se conocen las tensiones de fase de los generadores, las impedancias de carga, las impedancias de línea y la impedancia de tierra.

Se quieren determinar las corrientes de línea y las tensiones de fase y de línea en los terminales de la carga (punto Q de la figura)

Inicialmente, vamos a considerar la impedancia de tierra nula. En este caso la determinación de las corrientes de línea se realiza como lo visto en el punto 9, ya que si $Z_N = 0$ la aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff permitirá escribir:

$$V_{AN} = I_A (Z_A + Z_P)$$

$$V_{BN} = I_B (Z_B + Z_P)$$

$$V_{CN} = I_C (Z_C + Z_P)$$

Donde Z_P representa la impedancia propia de cada línea. Entonces las corrientes de línea podrán calcularse:

$$I_A = V_{AN} / (Z_A + Z_P)$$

$$I_B = V_{BN} / (Z_B + Z_P)$$

$$I_C = V_{CN} / (Z_C + Z_P)$$

La corriente de neutro valdrá: $I_N = I_A + I_B + I_C$

Las tensiones en la carga valdrán:

$$V_{A'N} = I_A Z_A$$

$$V_{B'N} = I_B Z_B$$

$$V_{C'N} = I_C Z_C$$

Las tensiones de línea en la carga deberán ser determinadas por las expresiones:

$$\begin{bmatrix} V_{A'B'} \\ V_{B'C'} \\ V_{C'A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A'N} \\ V_{B'N} \\ V_{C'N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{B'N} \\ V_{C'N} \\ V_{A'N} \end{bmatrix}$$

Consideremos el caso en que la impedancia de tierra sea distinta de cero $Z_N \neq 0$. Si aplicamos la 2° ley de Kirchhoff, podremos escribir tres ecuaciones recorriendo las distintas mallas formadas por las líneas y la impedancia de tierra, es decir:

$$\begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A (Z_A + Z_P) \\ I_B (Z_B + Z_P) \\ I_C (Z_C + Z_P) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_N Z_N \\ I_N Z_N \\ I_N Z_N \end{bmatrix}$$

Podemos escribir las corrientes de línea de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{V_{AN}}{Z_A + Z_P} - \frac{I_N Z_N}{Z_A + Z_P} &= I_A \\ \frac{V_{BN}}{Z_B + Z_P} - \frac{I_N Z_N}{Z_B + Z_P} &= I_B \\ \frac{V_{CN}}{Z_C + Z_P} - \frac{I_N Z_N}{Z_C + Z_P} &= I_C \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores y sabiendo que $I_N = I_A + I_B + I_C$, resulta:

$$I_N = \frac{\frac{V_{AN}}{(Z_A + Z_P)} + \frac{V_{BN}}{(Z_B + Z_P)} + \frac{V_{CN}}{(Z_C + Z_P)}}{1 + \frac{Z_N}{(Z_A + Z_P)} + \frac{Z_N}{(Z_B + Z_P)} + \frac{Z_N}{(Z_C + Z_P)}}$$

Sustituyendo el valor de I_N en las ecuaciones de las corrientes de línea obtenemos el valor de I_A , I_B e I_C .

Ejemplo numérico: Resolver el circuito de la figura que sigue sabiendo que: $V_{AN} = 220 \angle 0^\circ$ [V], $V_{BN} = 220 \angle -120^\circ$ [V], $V_{CN} = 220 \angle 120^\circ$ [V]; $Z'_A = Z'_B = Z'_C = Z_P = Z_N = 0,5 + j 2,0 \Omega$; $Z_A = 20 \Omega$, $Z_B = j 10 \Omega$ y $Z_C = -j 10 \Omega$

Resolución:

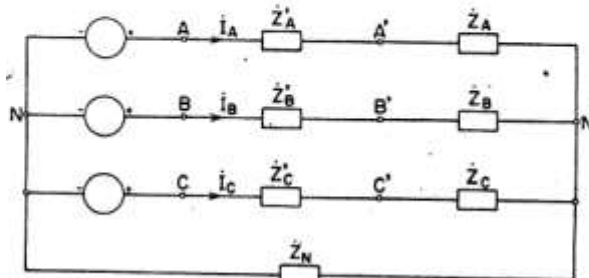
a) Determinación de la corriente de neutro:

$$Z_A + Z_P = 20,5 + j 2,0 \Omega = 20,6 \angle 5,6^\circ \Omega$$

$$Z_B + Z_P = 0,5 + j 12 \Omega = 12 \angle 87,6^\circ \Omega$$

$$Z_C + Z_P = 0,5 - j 8 \Omega = 8 \angle -86,4^\circ \Omega$$

$$Z_N = 0,5 + j 2 \Omega = 2,06 \angle 76,0^\circ \Omega$$



Reemplazando los valores en la expresión de la corriente de neutro resulta:

$$I_N = \frac{\frac{220 \angle 0^\circ}{20,6 \angle 5,6^\circ} + \frac{220 \angle -120^\circ}{12,0 \angle 87,6^\circ} + \frac{220 \angle 120^\circ}{8,0 \angle -86,4^\circ}}{1 + \frac{2,06 \angle 76^\circ}{20,6 \angle 5,6^\circ} + \frac{2,06 \angle 76^\circ}{12,0 \angle 87,6^\circ} + \frac{2,06 \angle 76^\circ}{8,0 \angle -86,4^\circ}} = 31,67 \angle -179,2^\circ \text{ A}$$

b) El cálculo de las corrientes de línea será:

Tenemos que la tensión entre los centros de estrella resulta:

$$V_{N'N} = I_N Z_N = 31,67 \angle -179,2^\circ \cdot 2,06 \angle 76^\circ = 65,2 \angle -103,2^\circ \text{ V}$$

Luego las tensiones en la carga valdrán:

$$V_{A'N'} = V_{AN} + V_{N'N} = 220 \angle 0^\circ + (-65,2 \angle -103,2^\circ) = 243,3 \angle 15,1^\circ \text{ V}$$

$$V_{B'N'} = V_{BN} + V_{N'N} = 220 \angle -120^\circ + (-65,2 \angle -103,2^\circ) = 158,7 \angle -126,8^\circ \text{ V}$$

$$V_{C'N'} = V_{CN} + V_{N'N} = 220 \angle 120^\circ + (-65,2 \angle -103,2^\circ) = 271,2 \angle 110,5^\circ \text{ V}$$

Luego las corrientes valdrán:

$$I_A = \frac{243,3 \text{ V} \angle 15,1^\circ}{20,6 \Omega \angle 5,6^\circ} = 11,8 \text{ A} \angle 9,5^\circ$$

$$I_B = \frac{158,7 \text{ V} \angle -126,8^\circ}{12 \Omega \angle 87,6^\circ} = 13,2 \text{ A} \angle 145,6^\circ$$

$$I_C = \frac{271,2 \text{ V} \angle 110,5^\circ}{8 \Omega \angle -86,4^\circ} = 33,9 \text{ A} \angle -163,1^\circ$$

c) Las tensiones en la carga valdrán:

$$V_{A'N'} = I_A Z_A = 11,8 \angle 9,5^\circ \cdot 20 \angle 0^\circ = 236 \angle 9,5^\circ \text{ V}$$

$$V_{B'N'} = I_B Z_B = 13,2 \angle 145,6^\circ \cdot 10 \angle 90^\circ = 132 \angle -124,4^\circ \text{ V}$$

$$V_{C'N'} = I_C Z_C = 33,9 \angle -163,1^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 339 \angle 106,9^\circ \text{ V}$$

d) Las tensiones de línea en la carga valdrán:

$V_{A'B'}$	$236 \angle 9,5^\circ$	$132 \angle -124,4^\circ$	$341 \angle 25,7^\circ$
$V_{B'C'}$	$132 \angle -124,4^\circ$	$339 \angle -106,9^\circ$	$434 \angle -86,8^\circ$
$V_{C'A'}$	$339 \angle 106,9^\circ$	$236 \angle -124,4^\circ$	$437 \angle 139,3^\circ$

10. Carga trifásica desequilibrada conectada en Y con el centro de estrella aislado de tierra conectado a un sistema simétrico de generación.

Supongamos un circuito como se muestra en la figura 25, compuesto por tres generadores monofásicos conectados en estrella, con el centro de estrella conectado a tierra, que constituyen un sistema trifásico simétrico de generación (tres tensiones iguales en módulo y desfasadas en mismo ángulo), una línea trifásica equilibrada representada por las impedancias Z_P que permiten conectar el generador con una carga desequilibrada conectada en estrella (Z_A, Z_B, Z_C), la cual no tiene el centro de estrella conectado a tierra.

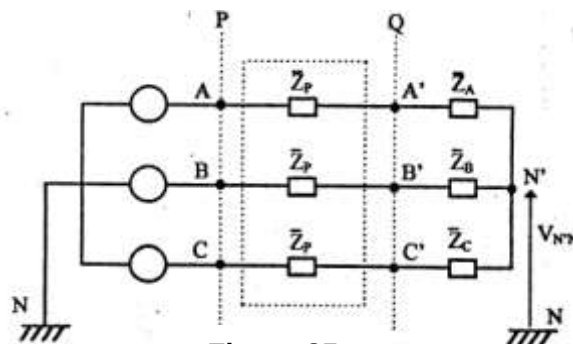


Figura 25

De este sistema se conocen las tensiones de fase de los generadores, las impedancias de línea y las impedancias de carga, queriendo determinar las tensiones y corrientes en la carga. (punto Q de la figura).

En virtud de que no existe vinculación eléctrica entre los puntos N y N' (Figura 25) se cumple por una parte que $\Sigma I_L = 0$, lo que significa que este juego de corrientes de línea será distinto de la terna de corrientes de línea del sistema estrella con neutro ya visto, donde se verificaba que $\Sigma I_L = I_N$.

Para este último caso resultaba que las tensiones de fase se aplicaban a la carga, es evidente que al mismo sistema de carga desequilibrada en Y, pero sin neutro, si se alteran las corrientes de fase será porque se alteran las respectivas tensiones de fase, ya que las Z_f son constantes.

Efectivamente se produce una “**deformación de las tensiones de fase de la carga**”, de manera que sus composiciones dan las mismas tensiones compuestas de generación (o sea los extremos de los fasores de las tensiones de fase de carga se ubican en los vértices del triángulo de tensiones de línea)

Lo anterior implica que el centro de estrella de la carga (punto N') no coincide con el centro de estrella del generador (punto N), es decir existe una “**tensión de desplazamiento de neutro $V_{NN'}$** ”

Vamos a determinar la tensión de desplazamiento de neutro a partir de las siguientes consideraciones. Las tensiones aplicadas a la carga, aplicando la 2° ley de Kirchhoff resulta:

$$V_{AN'} = V_{AN} + V_{NN'} = I_A (Z_A + Z_P)$$

$$V_{BN'} = V_{BN} + V_{NN'} = I_B (Z_B + Z_P)$$

$$V_{CN'} = V_{CN} + V_{NN'} = I_C (Z_C + Z_P)$$

Definiendo las impedancias totales por fase: $Z_{AT} = Z_A + Z_P$, $Z_{BT} = Z_B + Z_P$, $Z_{CT} = Z_C + Z_P$, resultando sus admitancias $Y_{AT} = 1 / Z_{AT}$, $Y_{BT} = 1 / Z_{BT}$ y $Y_{CT} = 1 / Z_{CT}$.

$$I_A = V_{AN} / Z_{AT} + V_{NN'} / Z_{AT} = Y_{AT} V_{AN} + Y_{AT} V_{NN'}$$

$$I_B = V_{BN} / Z_{BT} + V_{NN'} / Z_{BT} = Y_{BT} V_{BN} + Y_{BT} V_{NN'}$$

$$I_C = V_{CN} / Z_{CT} + V_{NN'} / Z_{CT} = Y_{CT} V_{CN} + Y_{CT} V_{NN'}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones y sabiendo que $I_A + I_B + I_C = 0$, resulta que la tensión de desplazamiento de neutro $V_{NN'}$ valdrá:

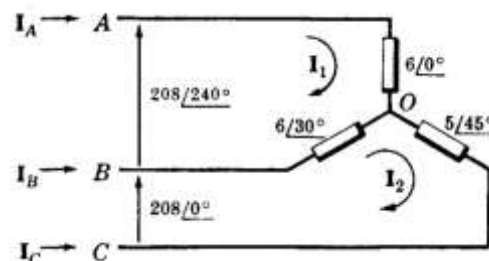
$$V_{NN'} = - \frac{Y_{AT} V_{AN} + Y_{BT} V_{BN} + Y_{CT} V_{CN}}{Y_{AT} + Y_{BT} + Y_{CT}}$$

Esta ecuación nos permite determinar el valor de $V_{NN'}$ que sustituido en las expresiones anteriores nos permiten determinar las tensiones y corrientes en la carga.

10.1. Ejemplo de carga desequilibrada en estrella “Y” conectada a un sistema trifásico “trifilar”

Un sistema trifásico, de secuencia CBA, trifilar, de 208 V, tiene una carga en estrella con $Z_A = 6 \angle 0^\circ$, $Z_B = 6 \angle 30^\circ$ y $Z_C = 5 \angle 45^\circ$.

Obtener las corrientes de línea, la tensión en cada impedancia y determinar la tensión de desplazamiento de neutro V_{ON} .



• **Resolución**

Se elige una terna de tensiones de línea. Las tensiones de línea serán:

$$V_{BC} = 208 \angle 0^\circ \quad V_{CA} = 208 \angle 120^\circ \quad V_{AB} = 208 \angle 240^\circ$$

Se eligen las corrientes de malla, como se indica en la figura. El sistema de ecuaciones en forma matricial resulta:

$$\begin{vmatrix} 6 \angle 0^\circ + 6 \angle 30^\circ & -6 \angle 30^\circ \\ -6 \angle 30^\circ & 6 \angle 30^\circ + 5 \angle 45^\circ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 208 \angle 240^\circ \\ 208 \angle 0^\circ \end{vmatrix}$$

de donde $I_1 = 23,3 \angle 261,1^\circ$ e $I_2 = 26,5 \angle -63,4^\circ$

Las corrientes de línea serán:

$$I_A = I_1 = 23,3 \angle 261,1^\circ$$

$$I_B = I_2 - I_1 = 15,45 \angle -2,5^\circ$$

$$I_C = -I_2 = 26,5 \angle 116,6^\circ$$

Las tensiones en las tres impedancias vienen dadas por:

$$V_{AO} = I_A \cdot Z_A = 139,8 \angle 261,1^\circ, \quad V_{BO} = I_B \cdot Z_B = 92,7 \angle 27,5^\circ, \quad V_{CO} = I_C \cdot Z_C = 132,5 \angle 161,6^\circ$$

La tensión de desplazamiento de neutro puede calcularse:

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = -139,8 \angle 261,1^\circ + 120 \angle -90^\circ = 28,1 \angle 39,8^\circ$$

10.2. Ejemplo de carga desequilibrada conectada en estrella "Y" conectada a un sistema trifilar. Método de la tensión de desplazamiento de neutro.

$$V_{ON} = \frac{V_{AN} Y_A + V_{BN} Y_B + V_{CN} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

$$Y_A = 1/6 \angle 0^\circ = 0,166 \angle 0^\circ = 0,1667$$

$$Y_B = 1/6 \angle 30^\circ = 0,166 \angle -30^\circ = 0,1443 - j 0,0833$$

$$Y_C = 1/5 \angle 45^\circ = 0,20 \angle -45^\circ = 0,1414 - j 0,1414$$

$$Y_A + Y_B + Y_C = 0,4524 - j 0,2247 = 0,504 \angle -26,5^\circ$$

$$V_{AN} Y_A = 20 \angle -90^\circ = -j 20, \quad V_{BN} Y_B = 20 \angle 0^\circ = 20, \quad V_{CN} Y_C = 24 \angle 105^\circ = -6,2 - j 23,2$$

$$V_{AN} Y_A + V_{BN} Y_B + V_{CN} Y_C = 13,8 + j 3,2 = 14,1 \angle 13,1^\circ$$

$$V_{ON} = 28,0 \angle 39,6^\circ$$

Las tensiones V_{AO} , V_{BO} y V_{CO} se obtienen a partir de V_{NO} y de la correspondiente tensión de fase a neutro (tensión simple):

$$V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} = 139,5 \angle 261,1^\circ$$

$$V_{BO} = V_{BN} + V_{NO} = 92,5 \angle 27,1^\circ$$

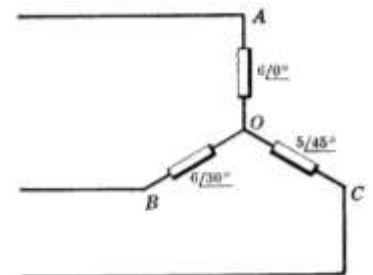
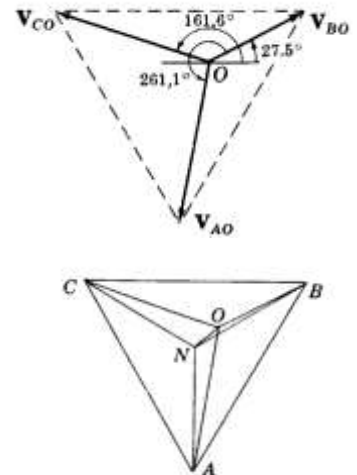
$$V_{CO} = V_{CN} + V_{NO} = 132,5 \angle 161,45^\circ$$

Las corrientes de línea se obtienen de las tensiones y admitancias de carga:

$$I_A = V_{AO} Y_A = 23,2 \angle 261,1^\circ$$

$$I_B = V_{BO} Y_B = 15,4 \angle -2,9^\circ$$

$$I_C = V_{CO} Y_C = 26,5 \angle 116,45^\circ$$



11. Carga trifásica desequilibrada conectada en triángulo “Δ” a un sistema trifilar.

En la figura 26 se representa la conexión de una carga no balanceada (desequilibrada) conectada en Δ donde se cumple que: $Z_{RS} \neq Z_{ST} \neq Z_{TR}$. Para determinar las corrientes de línea, se deberán primero calcular las corrientes de fase indicadas como I_{RS} , I_{ST} e I_{TR} .

Las corrientes de fase resultan de aplicar la ley de Ohm como:

$$I_{RS} = V_{RS} / Z_{RS}$$

$$I_{ST} = V_{ST} / Z_{ST}$$

$$I_{TR} = V_{TR} / Z_{TR}$$

Las corrientes de línea aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff en los nodos indicados como R, S y T en la figura 23, resultan:

$$I_R = I_{RS} - I_{TR}$$

$$I_S = I_{ST} - I_{RS}$$

$$I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

En la figura 27 se representa el diagrama fasorial donde se ponen de manifiesto las relaciones indicadas anteriormente.

Obsérvese que dado que la conexión en triángulo no admite la conexión del neutro no se han indicado las tensiones de fase o simples en el diagrama, representándose las tensiones de línea, por ser las tensiones que tienen aplicadas dada impedancia de carga.

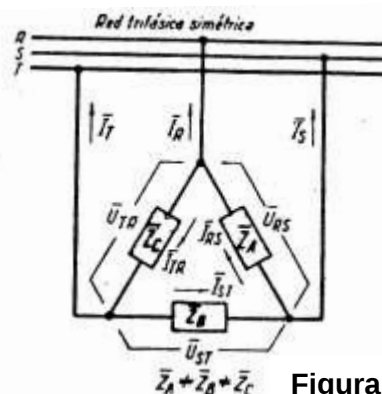


Figura 26

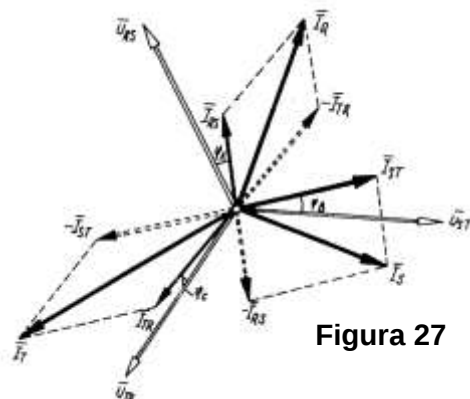
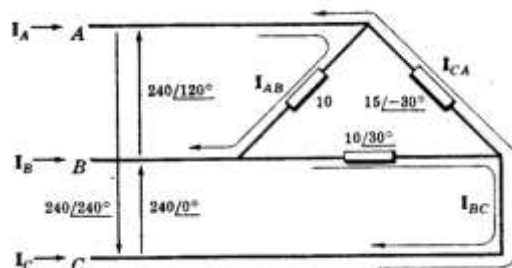


Figura 27

11.1. Ejemplo de carga desequilibrada conectada en Δ a un sistema trifilar

Un sistema trifásico de secuencia ABC (secuencia directa) de tres conductores y 240 V de tensión compuesta, tiene una carga conectada en triángulo con valores:

$Z_{AB} = 10 \angle 0^\circ$, $Z_{BC} = 10 \angle 30^\circ$, $Z_{CA} = 10 \angle -30^\circ$. Obtener las corrientes de línea y dibujar el diagrama fasorial.



• Resolución

Se elige una terna de tensiones de línea, que determinan los sentidos de las corrientes de fase indicados en el diagrama. Las tensiones de línea serán:

$$V_{AB} = 240 \angle 120^\circ \quad V_{BC} = 240 \angle 0^\circ \quad V_{CA} = 240 \angle 240^\circ$$

Aplicando la Ley de Ohm las corrientes de fase resultan:

$$I_{AB} = V_{AB} / Z_{AB} = 24 \angle 120^\circ$$

$$I_{BC} = V_{BC} / Z_{BC} = 24 \angle -30^\circ$$

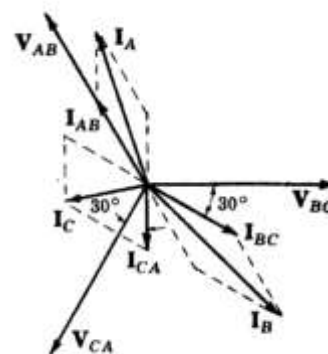
$$I_{CA} = V_{CA} / Z_{CA} = 16 \angle 270^\circ$$

Aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff a cada nodo del triángulo de carga, las corrientes de línea resultan:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 38,7 \angle 108,1^\circ$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} = 46,4 \angle -45^\circ$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = 21,2 \angle 190,2^\circ$$



12. Potencia en sistemas trifásicos

12.1 Potencia instantánea en un sistema trifásico equilibrado

La potencia instantánea, suministrada por un generador trifásico equilibrado, es constante e igual a la potencia activa. La exposición que sigue es igualmente válida, para las conexiones en estrella como para las en triángulo.

Tensiones de fases

$$e_{f1}(t) = \sqrt{2} E_f \cos \omega t$$

$$e_{f2}(t) = \sqrt{2} E_f \cos (\omega t - 2\pi/3)$$

$$e_{f3}(t) = \sqrt{2} E_f \cos (\omega t - 4\pi/3)$$

Corrientes de fases

$$i_{f1}(t) = \sqrt{2} I_f \cos (\omega t - \varphi)$$

$$i_{f2}(t) = \sqrt{2} I_f \cos (\omega t - 2\pi/3 - \varphi)$$

$$i_{f3}(t) = \sqrt{2} I_f \cos (\omega t - 4\pi/3 - \varphi)$$

Las expresiones de las potencias instantáneas:

$$p_{f1} = 2 E_f I_f \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi) = E_f I_f [\cos (2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$$

$$p_{f2} = 2 E_f I_f \cos (\omega t - 2\pi/3) \cos (\omega t - 2\pi/3 - \varphi) = E_f I_f [\cos (2\omega t - 4\pi/3 - \varphi) + \cos \varphi]$$

$$p_{f3} = 2 E_f I_f \cos (\omega t - 4\pi/3) \cos (\omega t - 4\pi/3 - \varphi) = E_f I_f [\cos (2\omega t - 8\pi/3 - \varphi) + \cos \varphi]$$

$$p = p_{f1} + p_{f2} + p_{f3} = 3 E_f I_f \cos \varphi = P$$

Esto supone otra ventaja del sistema trifásico, frente al monofásico cuya energía activa instantánea es unidireccional, más no constante. En máquinas rotatorias trifásicas, tanto generadoras como consumidoras, significa que el par es constante.

12.2 Potencias en los sistemas trifásicos equilibrados

12.2.1 Potencia activa

La potencia activa de un sistema trifásico es la suma de las potencias activas de los sistemas monofásicos que lo componen. Si se supone equilibrado, la potencia activa buscada es tres veces la de uno de sus sistemas monofásicos. Véase cómo se llega a una expresión común a los dos tipos de conexiones, para lo cual nos basaremos en la **Figura 28**.

✓ **Conexión en estrella:** $P = 3 E_{\text{fase Y}} I_{\text{fase Y}} \cos \varphi = \sqrt{3} U I \cos \varphi$

✓ **Conexión en triángulo:** $P = 3 E_{\text{fase } \Delta} I_{\text{fase } \Delta} \cos \varphi = \sqrt{3} U I \cos \varphi$

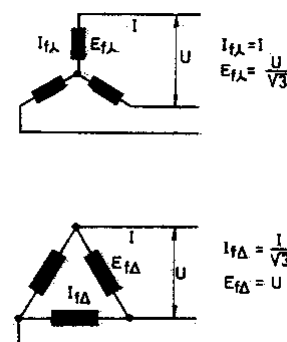


Figura 28

Nótese que φ es el ángulo que forman los fasores $E_{\text{fase Y}}$ y $I_{\text{fase Y}}$, o también $E_{\text{fase } \Delta}$ y $I_{\text{fase } \Delta}$, correspondientes a una misma fase, pero no el ángulo formado por una tensión compuesta U con una I de línea, que son los factores que intervienen en la fórmula final común. Queda claro que $\cos \varphi$ es el factor de potencia de cada sistema monofásico y, por consiguiente, el correspondiente al tipo de carga Z .

12.2.2 Potencia Reactiva “Q”

La potencia reactiva por fase vale, según lo desarrollado al estudiar las distintas potencias involucradas en los circuitos eléctricos excitados con corriente alterna:

$$Q_{\varphi} = V_{\varphi} I_{\varphi} \sin \theta_{I_{\varphi}}^{V_{\varphi}} = I_{\varphi}^2 X_{\varphi} \quad (\text{VAR})$$

La potencia total consumida por la carga trifásica vale: $Q_T = 3 Q_\phi$ [VAR]

O procediendo como antes para la potencia activa será:

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \sin \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 3 I_L^2 X_\phi \quad (\text{VAR})$$

12.2.3 Potencia aparente “S”

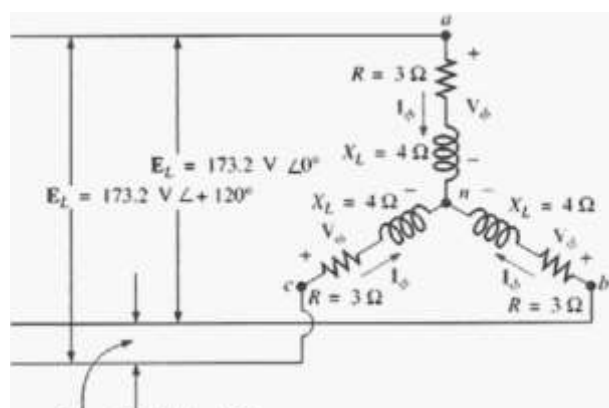
La potencia aparente de cada fase vale: $S_\phi = V_\phi \cdot I_\phi$ [VA]

La potencia aparente total de la carga trifásica será: $S_T = 3 S_\phi$ [VA]. O, como antes:

$$S_T = \sqrt{3} E_L I_L \quad (\text{VA})$$

Ejemplo 5.- Para la carga balanceada conectada en Y de la figura que sigue encontrar:

- Encuentre la potencia activa para cada fase y la carga total;
- Encuentre la potencia reactiva para cada fase y la carga total;
- Encuentre la potencia aparente para cada fase y la carga total;
- Encuentre el factor de potencia de la carga trifásica.



Solución:

- La potencia promedio es:

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = I_\phi^2 R_\phi \quad (\text{W})$$

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 100 \cdot 20 \cdot \cos 53,13^\circ = 1200 \text{ W}$$

$$P_\phi = I_\phi^2 R = 20^2 \cdot 3 = 1200 \text{ W}$$

$$P_T = 3 P_\phi = 3 \cdot 1200 = 3600 \text{ W}$$

O bien:

$$P_T = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 1,73 \cdot 173,2 \cdot 20 \cdot 0,6 = 3600 \quad (\text{W})$$

- La potencia reactiva es:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = I_\phi^2 X_\phi \quad (\text{VAR})$$

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 100 \cdot 20 \cdot \sin 53,13^\circ = 1600 \text{ VAR}$$

$$Q_\phi = I_\phi^2 X_\phi = 20^2 \cdot 4 = 1600 \text{ VAR}$$

$$Q_T = 3 Q_\phi = 3 \cdot 1600 = 4800 \text{ VAR}$$

O bien:

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \sin \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 1,73 \cdot 173,2 \cdot 20 \cdot 0,8 = 4800 \quad (\text{VAR})$$

c) La potencia aparente es:

$$S_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} \quad (\text{VA})$$

$$S_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} = 100 \cdot 20 = 2000 \quad (\text{VA})$$

$$S_T = 3 S_{\phi} = 3 \cdot 2000 = 6000 \quad (\text{VA})$$

o bien:

$$S_T = \sqrt{3} E_L I_L = 1,732 \cdot 173,2 \cdot 20 = 6000 \quad (\text{VA})$$

d) El factor de potencia es: $fp = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3600}{6000} = 0,6 \text{ (atrasado)}$

Ejemplo 6.- Para las cargas conectadas en Y y en Δ , encuentre las potencias totales activa, reactiva y aparente, además del factor de potencia de la carga total.

Solución: Tratando las cargas por separado resulta:

Para la Y:

$$Z_Y = 4 + j 3 = 5 \angle 36,87^\circ$$

$$I_{\phi} = (E_L / \sqrt{3}) / Z_Y = 23,12 \text{ A}$$

$$P_{TY} = 3 I_{\phi}^2 R_{\phi} = 6414,41 \text{ W}$$

$$Q_{TY} = 3 I_{\phi}^2 X_{\phi} = 4810,81 \text{ VAR}$$

$$S_{TY} = 3 V_{\phi} I_{\phi} = 8045,76 \text{ VA}$$

Para el Δ :

$$Z_{\Delta} = 6 - j 8 = 10 \angle -53,13^\circ$$

$$I_{\phi} = E_L / Z_{\Delta} = 20 \text{ A}$$

$$P_{T\Delta} = 3 I_{\phi}^2 R_{\phi} = 7200 \text{ W}$$

$$Q_{T\Delta} = 3 I_{\phi}^2 X_{\phi} = 9600 \text{ VAR (C)}$$

$$S_{T\Delta} = 3 V_{\phi} I_{\phi} = 12000 \text{ VA}$$

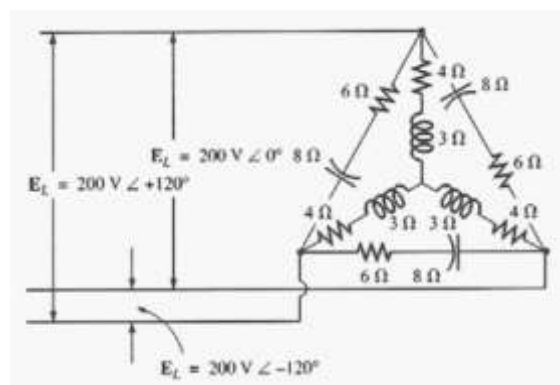
Para la carga total:

$$P_T = P_{TY} + P_{T\Delta} = 13614,41 \text{ W}$$

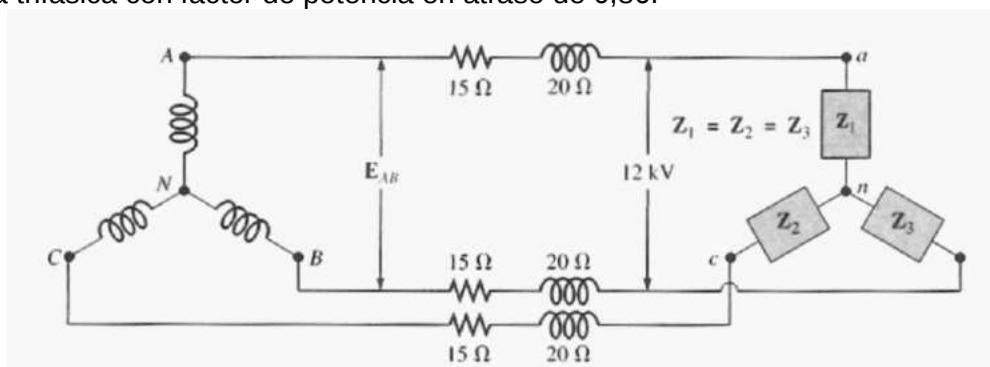
$$Q_T = Q_{TY} + Q_{T\Delta} = 4810,81 - 9600 = -4789,19 \text{ (VAR) (C)}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 14432,2 \text{ VA}$$

$$fp = P_T / S_T = 0,943 \text{ (capacitivo)}$$



Ejemplo 7.- Cada línea de transmisión del sistema trifásico de tres alambres de la figura tiene impedancia de $15 + j 20 \Omega$. El sistema entrega una potencia total de 160 kW a 12.000 V a una carga balanceada trifásica con factor de potencia en atraso de 0,86.

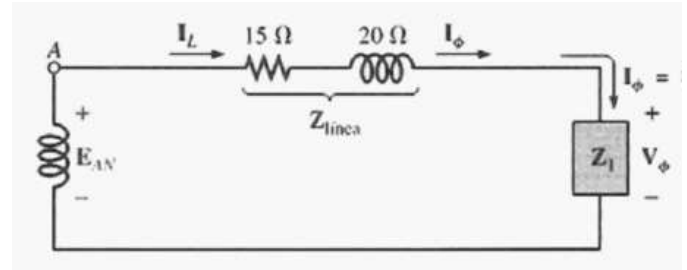


- Determine la magnitud del voltaje de línea E_{AB} del generador.
- Encuentre el factor de potencia de la carga total aplicada al generador.
- ¿Cuál es la eficiencia del sistema?

Solución:

- V_ϕ (carga) = $V_L / \sqrt{3} = 6936,42 \text{ V}$
 P_T (carga) = $3 V_\phi I_\phi \cos \theta$ donde:
 $I_\phi = P_T / 3 V_\phi \cos \theta = 8,94 \text{ A}$

Como $\theta = \cos^{-1} 0,86 = 30,68^\circ$, asignando a V_ϕ un ángulo de 0° o $V_\phi = V_\phi \angle 0^\circ$, un factor de potencia atrasado resulta en: $I_\phi = 8,94 \angle -30,68^\circ$



Para cada fase, el sistema aparecerá como se muestra en la figura, donde:

$$E_{AN} - I_\phi Z_{linea} - V_\phi = 0$$

$$E_{AN} = I_\phi Z_{linea} + V_\phi = (8,94 \angle -30,68^\circ)(25 \angle 53,13^\circ) + 6936,42 \angle 0^\circ$$

$$= 7142,98 + j 85,35 = 7143,5 \angle 0,68^\circ$$

La tensión de línea valdrá: $E_{AB} = \sqrt{3} E_{\phi} = 12358,26 \text{ V}$

-

$$P_T = P_{carga} + P_{linea} = 160 \text{ kW} + 3 (I_L^2) R_{linea} = 160 \text{ kW} + 3596,55 \text{ W} = 163596,55 \text{ W}$$

$$P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_T \quad \cos \theta_T = \frac{P_T}{\sqrt{3} V_L I_L} = 0,856 < 0,86 \text{ de carga}$$

-

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{P_o}{P_o + P_{pérdidas}} = 0,978 = 97,8 \%$$

12.3. Potencias en cargas desequilibradas

Un sistema trifásico puede ser entendido como un circuito compuesto por tres circuitos monofásicos, adecuadamente vinculados. Tratándose de tres fases, la potencia activa del conjunto trifásico será la suma de las potencias de las tres fases:

$$P = \sum P_i = P_A + P_B + P_C$$

Tratándose de una **carga desequilibrada conectada en Y**, tendremos:

$$P_Y = U_{R0} I_R \cos \varphi_R + U_{S0} I_S \cos \varphi_S + U_{T0} I_T \cos \varphi_T$$

Donde:

U_{R0} ; U_{S0} ; U_{T0} = tensiones de fase aplicadas en las cargas.

φ_R ; φ_S ; φ_T = ángulo que forma la tensión de fase aplicada y la corriente de fase.

Tratándose de una carga desequilibrada conectada en Δ , tendremos:

$$P_{\Delta} = U_{RS} I_{RS} \cos \varphi_{RS} + U_{ST} I_{ST} \cos \varphi_{ST} + U_{TR} I_{TR} \cos \varphi_{TR}$$

Donde:

U_{RS} ; U_{ST} ; U_{TR} = tensiones de línea aplicadas en las cargas.

φ_{RS} ; φ_{ST} ; φ_{TR} = ángulo que forma la tensión de línea aplicada y la corriente de fase.

Para el caso de las potencias reactivas, el tratamiento es idéntico, vale decir:

$$Q_Y = U_{RO} I_R \sin \varphi_R + U_{SO} I_S \sin \varphi_S + U_{TO} I_T \sin \varphi_T$$

$$Q_{\Delta} = U_{RS} I_{RS} \sin \varphi_{RS} + U_{ST} I_{ST} \sin \varphi_{ST} + U_{TR} I_{TR} \sin \varphi_{TR}$$

Para la potencia aparente podemos hacer las mismas consideraciones que en el caso de los circuitos monofásicos, luego podemos establecer:

$$S = \sqrt{(P_R + P_S + P_T)^2 + (Q_R + Q_S + Q_T)^2}$$

$$S = \sqrt{P_{\text{total}}^2 + Q_{\text{total}}^2}$$

13. El factor de potencia en redes trifásicas y su mejoramiento

En el caso de los sistemas trifásicos desequilibrados hay que considerar tres desfases entre tensiones y corrientes de fase.

Solo es posible determinar un “**factor de potencia medio**” que viene expresado por:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{\sum P_i}{\sum S_i} = \frac{(P_A + P_B + P_C)}{\sqrt{(P_A + P_B + P_C)^2 + (Q_A + Q_B + Q_C)^2}} \quad \text{o también en forma más general:}$$

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Al estudiar los circuitos monofásicos se definió el factor de potencia y se desarrolló como podía mejorarse para llevarlo a un valor deseado. Los conceptos generales desarrollados allí valen ahora también aquí para los sistemas trifásicos, en lo que es más corriente hacer una corrección.

Para ello, examinemos, la **figura 29** que sigue, que representa una instalación industrial trifásica, cuyo factor de potencia es de naturaleza inductiva, en virtud de los motores que corrientemente se utilizan en este tipo de instalación y de los circuitos de iluminación que presentan características inductivas.

Se observa que a la entrada de la línea que alimenta la instalación desde la red de servicios públicos, debe existir un sistema de medición de energía activa y en muchos casos de energía reactiva.

La operación que realizan estos medidores es la integración de las potencias a lo largo del tiempo, es decir:

$$E_{\text{activa}} = \sum P_i t_i \text{ [kWh]} \quad \text{[Medidor de energía activa]}$$

$$E_{\text{reactiva}} = \sum Q_i t_i \text{ [kVAh]} \quad \text{[Medidor de energía reactiva]}$$

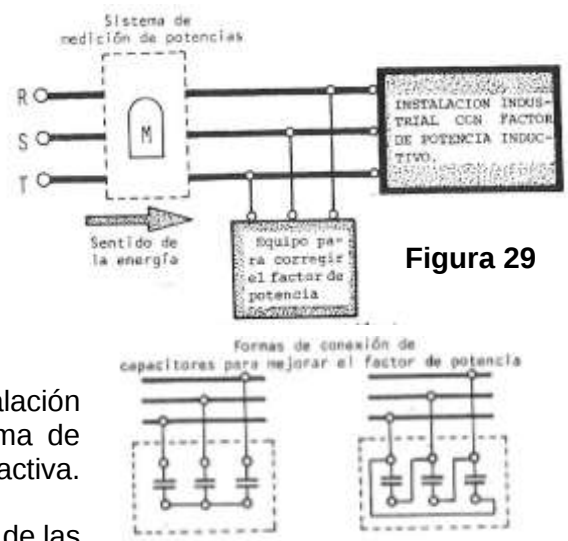


Figura 29

Con estos dos valores, la empresa prestataria del servicio determina: $\text{tg } \phi = (E_{\text{reactiva mensual}}) / (E_{\text{activa mensual}})$.

En las tarifas eléctricas, cuando el valor anteriormente citado de $\text{tg } \phi$ es mayor que un valor fijado por la legislación, los precios de la energía activa, es decir, los precios del kilo - watt- hora (kWh) sufren recargos.

Es entonces evidencia que a los consumidores – sobre todo a los industriales y los llamados grandes consumos – les resulta beneficioso llevar el valor de $\text{tg } \phi$ tendientes a cero, o sea que el factor de potencia debe tender a la unidad.

Por esa razón, muchos consumidores intercalan entre su instalación y los medidores de energía, un equipamiento capaz de conseguir una condición como la planteada.

De esta manera la potencia que en definitiva “ve” la empresa prestataria del servicio, es una instalación con un $\cos \phi$ corregido, es decir que le sustrae potencia activa solamente.

Para lograr esto, el equipo intercalado debe tomar energía reactiva de naturaleza capacitiva, capaz de equilibrar la potencia reactiva inductiva que toma la instalación industrial.

Para lograr la condición de $\cos \phi = 1$, es decir $\phi = 0$ la potencia reactiva del equipo debe ser igual a la potencia reactiva de la instalación, la que sabemos vale: $Q_{\text{instalación}} = P_{\text{total}} \text{tg } \phi$

El valor de P es la potencia activa de la instalación y $\text{tg } \phi$ el valor con que funciona. Ambas cantidades se pueden calcular o medir sin dificultad.

Los equipos destinados a corregir el factor de potencia en las industrias o instalaciones medianas son las baterías de “capacitores”. Estos pueden ser conectados en estrella o en triángulo, según puede verse en la figura.

13.1. Ejemplo de aplicación

Una industria toma energía de la red de 3 x 380 V – 50 Hz a través de una línea trifásica. La carga está formada por:

- Motores trifásicos conectados en triángulo, que totalizan una potencia de 28 kW con factor de potencia 0,7 en atraso.
- Un horno de inducción conectado en estrella que consume 7200 W, con factor de potencia 0,25 inductivo.
- Un equipo de calefactores conectados en triángulo que consume 3800 W con factor de potencia igual a 1.

Se desea corregir el factor de potencia de la carga total, mediante un banco de capacitores conectados en triángulo, de modo de llevar el valor del factor de potencia a 0,85 en atraso.

Calcular:

- ✓ El valor de los capacitores a conectar en triángulo.
- ✓ La corriente por el alimentador antes y después de la corrección.

➤ Resolución:

Como primer paso en base a los datos dados calculamos las potencias activa, reactiva y aparente de cada carga y las totales. Los resultados pueden verse en el siguiente cuadro:

CARGA	POTENCIA ACTIVA [W]	POTENCIA REACTIVA [Var]	POTENCIA APARENTE [VA]
MOTORES	28.000	28.566	40.000
HORNO	7.200	27.885	28.800
CALEFACTORES	3.800	---	3.800
TOTAL	39.000	56.451	68.613

Determinamos el factor de potencia de la instalación, mediante la siguiente relación:

$$\varphi_m = \text{Arc tg} \frac{Q_m}{P_m} = \text{Arc tg} \frac{56.451}{39.000} = 55,4^\circ \quad \cos \varphi_m = 0,568$$

Las corrientes de línea serán iguales por tratarse de un circuito equilibrado en cargas, para calcular dicha corriente procedemos de la siguiente manera:

$$I = \frac{P_m}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi} = \frac{39.000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,568} = 104,35 \text{ A}$$

Para determinar el valor del capacitor por fase, partiremos de los datos que ya hemos calculado a saber:

Tensión de línea= $U_L = 380 \text{ V}$

Frecuencia= $f = 50 \text{ Hz}$ ($\omega = 2 \pi f$)

Potencia activa total = $P_{\text{total}} = 39.000 \text{ W}$

$\cos \varphi_m = 0,568$ (L) (factor de potencia inicial)

$\cos \varphi_R = 0,85$ (L) (factor de potencia deseado)

$$C = \frac{P_m (\text{tg} \varphi_m - \text{tg} \varphi_R)}{3 \cdot \omega \cdot U_L^2} = \frac{39.000 (\text{tg} 55,4^\circ - \text{tg} 31,8^\circ)}{3 \cdot 314 \cdot 380^2} = 238 \mu\text{F}$$

La corriente de línea con la instalación corregida valdrá:

$$I_{\text{COR}} = \frac{P_m}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi_R} = \frac{39.000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,85} = 69,73 \text{ A}$$

14. Medición de potencia activa en circuitos trifásicos

14.1. Método de los tres vatímetros

La potencia entregada a una carga balanceada o no balanceada de cuatro conductores (tetrafilar), conectada en Y, puede encontrarse con el **método de los tres vatímetros**, es decir, usando tres vatímetros como se muestra en la **figura 30**.

Cada vatímetro mide la potencia entregada a cada fase.

La bobina de voltaje de cada vatímetro se conecta en paralelo con la carga, mientras que la bobina de corriente está en serie con la carga.

La potencia activa total del sistema se puede encontrar sumando las lecturas de los tres vatímetros, esto es:

$$P_T (Y) = P_1 + P_2 + P_3$$

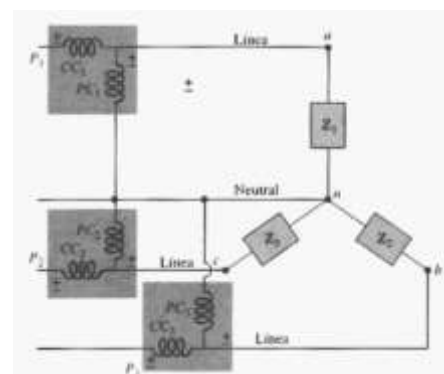


Figura 30

Para una carga (balanceada o no balanceada), conectada en Δ los vatímetros se conectan como se indica en la figura 31. La potencia total es de nuevo la suma de las tres lecturas en los vatímetros:

$$P_T (\Delta) = P_1 + P_2 + P_3$$

Si en cualquiera de los casos antes descritos la carga está balanceada, la potencia entregada a cada fase será la misma. Entonces, la potencia total es precisamente tres veces la lectura de cualquier vatímetro.

14.2. Método de los dos vatímetros (Conexión Aron)

La potencia entregada a una carga balanceada o no balanceada trifásica, para un sistema trifilar o de tres conductores (sin neutro), conectada en Y o en Δ , puede encontrarse usando sólo dos vatímetros si se emplea la conexión apropiada y las lecturas de los vatímetros se interpretan adecuadamente.

Las conexiones básicas de este **método de los dos vatímetros** se muestran en la **figura 32**. Un extremo de cada bobina de voltaje se conecta a la misma línea, y las bobinas de corriente se colocan entonces en las líneas restantes.

La potencia total entregada a la carga es la suma algebraica de las dos lecturas en los vatímetros.

La conexión mostrada en la figura 33 también cumplirá los requisitos. Una tercera conexión también es posible, pero se deja como ejercicio.

Las lecturas de los vatímetros resultan, según figura 32:

$$P_1 = V_{ac} \cdot I_a \cos \alpha \quad \text{donde } \alpha \text{ es el ángulo entre } V_{ac} \text{ e } I_a$$

$$P_2 = V_{bc} \cdot I_b \cos \beta \quad \text{donde } \beta \text{ es el ángulo entre } V_{bc} \text{ e } I_b$$

$$P_{Total} = P_1 + P_2$$

Si los vatímetros están conectados según la figura 33, las lecturas resultan:

$$P_1 = V_{ca} \cdot I_c \cos \alpha \quad \text{donde } \alpha \text{ es el ángulo entre } V_{ca} \text{ e } I_c$$

$$P_2 = V_{ba} \cdot I_b \cos \beta \quad \text{donde } \beta \text{ es el ángulo entre } V_{ba} \text{ e } I_b$$

Ejemplo 8.- Para la carga no balanceada conectada en Δ de la figura con dos vatímetros apropiadamente conectados:

- Determine la magnitud y el ángulo de las corrientes de fase.
- Determine la magnitud y el ángulo de las corrientes de línea.
- Determine las lecturas de los vatímetros.
- Calcule la potencia total consumida por la carga.
- Compare los resultados del inciso d) con la potencia total consumida usando las corrientes de fase y las resistencias.

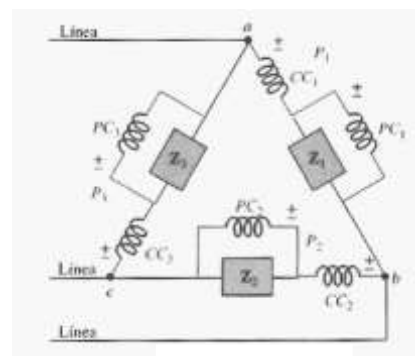


Figura 31

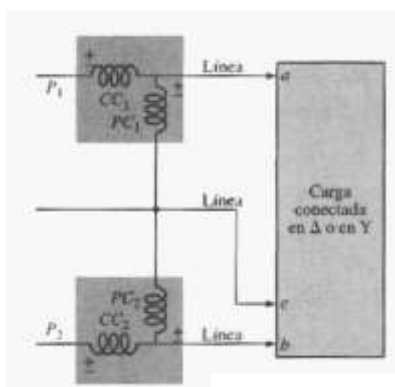


Figura 32

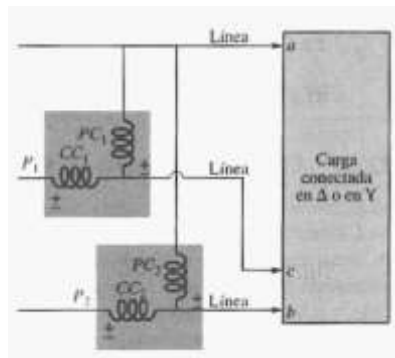


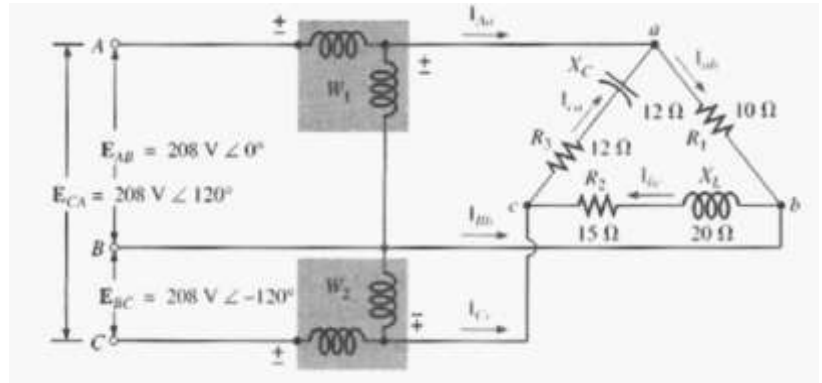
Figura 33

Solución:

$$a. I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{E_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{208 \text{ V} \angle 0^\circ}{10 \Omega \angle 0^\circ} = 20,8 \text{ A} \angle 0^\circ$$

$$I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{E_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{208 \text{ V} \angle -120^\circ}{15 + j 20 \Omega} = 8,32 \text{ A} \angle -173,13^\circ$$

$$I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{E_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{208 \text{ V} \angle 120^\circ}{12 + j 12 \Omega} = 12,26 \text{ A} \angle 165^\circ$$



$$b. I_{Aa} = I_{ab} - I_{ca} = 20,8 \text{ A} \angle 0^\circ - 12,26 \text{ A} \angle 165^\circ = 32,79 \text{ A} \angle -5,55^\circ$$

$$c. P_1 = V_{ab} I_{Aa} \cos \theta_{I_{Aa}}^{V_{ab}} \text{ donde: } V_{ab} = 208 \text{ V} \angle 0^\circ \text{ e } I_{Aa} = 32,79 \text{ A} \angle -5,55^\circ$$

$$P_1 = 208 \cdot 32,79 \cdot \cos 5,55^\circ = 6.788,35$$

$$P_2 = V_{cb} I_{Cc} \cos \theta_{I_{Cc}}^{V_{cb}} ; V_{cb} = 208 \text{ V} \angle -120^\circ + 180^\circ = 208 \text{ V} \angle 60^\circ \text{ e } I_{Cc} = 5,5 \text{ A} \angle 130,65^\circ$$

$$P_2 = 208 \cdot 5,55 \cdot \cos 70,65^\circ = 379,1$$

$$d. P_T = P_1 + P_2 = 7.167,45 \text{ W}$$

$$e. P_T = I_{ab}^2 R_1 + I_{bc}^2 R_2 + I_{ca}^2 R_3 = 7.168,43 \text{ W}$$

14.3. Medida de la potencia en circuitos equilibrados.

Supóngase que la carga de la Figura 34, está formada por tres impedancias iguales “Z” (carga equilibrada) conectada en estrella o en triángulo.

En este caso se obtendrán unas corrientes de línea de igual módulo y desfasadas de las tensiones simples de la red un ángulo “φ” (argumento de las impedancias)

En la **figura 35** se han representado en un diagrama fasorial las tensiones simples y compuestas, y también las corrientes de línea.

Las lecturas de los vatímetros P_1 y P_2 resultan atento la conexión de los mismos iguales a:

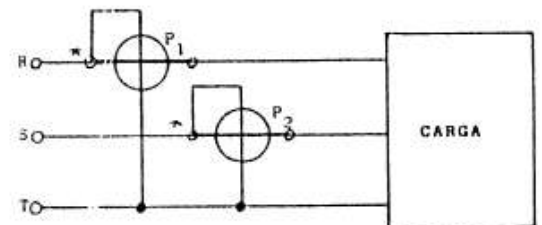


Figura 34

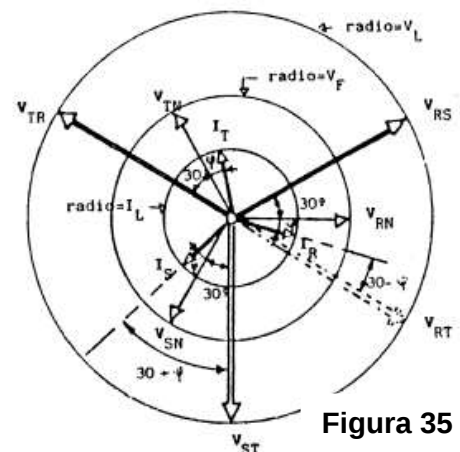


Figura 35

- **VATIMETRO 1:**
 - ✓ Bobina voltimétrica conectada entre las fases R y T
 - ✓ Bobina amperométrica en serie con la fase R
 - ✓ La lectura correspondiente será: $P_1 = V_{RT} I_R \cos \alpha = \text{Re} [V_{RT} \cdot I_R^*]$, siendo el ángulo α de desfase entre V_{RT} e I_R .
- **VATIMETRO 2:**
 - ✓ Bobina voltimétrica conectada entre las fases S y T
 - ✓ Bobina amperométrica en serie con la fase S
 - ✓ La lectura correspondiente será: $P_2 = V_{ST} I_S \cos \beta = \text{Re} [V_{ST} \cdot I_S^*]$, siendo β el ángulo de desfase entre V_{ST} e I_S .

De acuerdo con este diagrama fasorial el ángulo α que aparece en la expresión de la lectura del vatímetro 1 y que representa el desfase entre V_{RT} e I_R es $30^\circ - \varphi$, mientras que el ángulo β que aparece en P_2 es el desfase que existe entre V_{ST} e I_S y que vale: $30^\circ + \varphi$.

El módulo de las tensiones de línea es V_L y el módulo de las corrientes es I_L , de este modo las lecturas de los vatímetros de acuerdo con las expresiones citadas anteriormente serán:

$$P_1 = \text{Re} [V_{RT} \cdot I_R^*] = V_L I_L \cos (30^\circ - \varphi)$$

$$P_2 = \text{Re} [V_{ST} \cdot I_S^*] = V_L I_L \cos (30^\circ + \varphi)$$

De este modo la potencia total absorbida por la carga será: $P = P_1 + P_2 = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi$, que representa la potencia activa de un sistema equilibrado. Si se analizan las lecturas de los vatímetros, se pueden obtener los siguientes casos particulares:

1. Si la carga es resistiva pura, $\varphi = 0^\circ$, y ambas lecturas serán iguales $P_1 = P_2$.
2. Si $\varphi < 60^\circ$, es decir si el factor de potencia es superior a 0,5, entonces se tendrá: $P_1 > 0$ y $P_2 < 0$.
3. Si $\varphi = 60^\circ$, es decir si el factor de potencia igual a 0,5 entonces se tendrá: $P_2 = 0$.
4. Si $\varphi > 60^\circ$, entonces $\cos (30^\circ + \varphi)$ es negativo y el vatímetro 2 dará una lectura negativa.

De las lecturas de los vatímetros se puede deducir también el factor de potencia de la carga.

Restando los valores P_1 y P_2 se obtiene: $P_1 - P_2 = V_L I_L \sin \varphi$

Y dividiendo las expresiones de la diferencia de lecturas y la suma resulta:

$$P_1 - P_2 / P_1 + P_2 = 1/\sqrt{3} \tan \varphi \quad \text{es decir:} \quad \tan \varphi = (1/\sqrt{3}) [(P_1 - P_2) / (P_1 + P_2)]$$

De las lecturas de los vatímetros se puede obtener también la potencia reactiva de la carga:

$$Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2) = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

Teniendo en cuenta la conexión de los vatímetros y la secuencia de fases se puede establecer, para secuencia directa (ABC), que:

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{3} \frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3} \frac{W_C - W_A}{W_C + W_A}$$

Debe tenerse en cuenta que debe respetarse la diferencia de lecturas, para poder determinar el tipo de carga a considerar, dado que la diferencia de lecturas puede resultar positiva o negativa, lo que implica que la carga tenga características inductivas o capacitivas.

GI/2019