5 TEOREMAS DE LOS CIRCUITOS LINEALES

5.1 INTRODUCCIÓN.

¿Existe algo así como un sistema lineal ?..., Pues un sistema lineal sería aquel en el cual todos los procesos se podrían expresar por ecuaciones lineales... Un sistema así no existe evidentemente. Se sobrentiende, entonces, que cuando se menciona un "sistema lineal", se quiere decir que el sistema es lineal para algunos procesos determinados y no para todos los procesos que, posiblemente, se presenten en él. Así diremos que los circuitos tratados aquí son lineales porqué lo son respecto a los procesos que relacionan los voltajes y las corrientes. En cambio, estos mismos circuitos no se comportan como lineales en lo que respecta a la potencia y a la energía (salvo en casos excepcionales).

Ahora, en la práctica un circuito es lineal sólo en rangos, más o menos estrechos, de corriente, voltaje y frecuencia. Por ejemplo, un alambre de hierro ó una barra de carbón son resistencias lineales siempre y cuando la corriente que circule por ellas no las caliente apreciablemente. Un alambre de cobre aislado, enrollado en una barra de hierro, es una inductancia prácticamente lineal a bajas corrientes; pero deja de serlo si se aumenta la corriente hasta un limite fijado por la "saturación" magnética del núcleo de hierro. Afortunadamente el hombre se las ingenia para producir circuitos lineales en casi todos los rangos imaginables de corriente, voltaje y frecuencia. Para trabajar en esos circuitos lineales es que estudiamos la teoría de los circuitos lineales en general, sin importarnos las restricciones que la naturaleza impone a la linealidad cuando se lleva un dispositivo o circuito fuera de su "rango lineal".

5.2 CIRCUITOS LINEALES Y ECUACIONES LINEALES.

Un circuito es lineal si las ecuaciones que relacionan sus voltajes y corrientes son lineales, y viceversa, ¡no hay excepciones! O sea que en el caso de circuitos lineales

175

siempre es posible expresar una de estas cantidades como una función lineal de las demás. Ilustremos esto con un ejemplo sencillo.

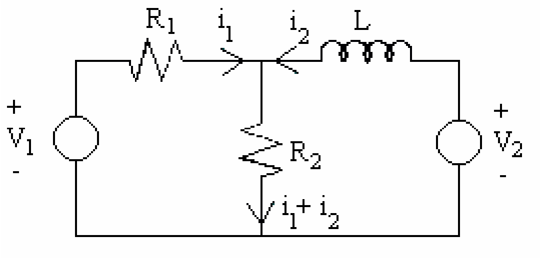


Figura 5.2.1. Circuitos lineales y ecuaciones lineales.

Ecuaciones de malla:

$$V_1 = (i_1 + i_2)R_2 + R_1 i_1 \qquad (1)$$

$$V_2 = (i_1 + i_2)R_2 + L\frac{di_2}{dt} \qquad (2)$$

Puedo despejar i_2 de (1):

$$i_2 = \frac{V_1 - i_1(R_1 + R_2)}{R_2} \qquad (3)$$

Y reemplazando i_2 en (2):

$$V_2 = i_1 R_2 + \left(R_2 + L\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{V_1 - i_1(R_1 + R_2)}{R_2}\right]$$

Obtenemos, finalmente:

$$i_1 = \frac{-1}{\left[R_1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)L\frac{d}{dt}\right]}\left[V_2 - \frac{\left(R_2 + L\frac{d}{dt}\right)}{R_2}V_1\right] \qquad (4)$$

Como se observa, cualquiera de las cuatro cantidades puede expresarse como una función lineal de las otras tres, Introducimos una representación de estas funciones por

176

"bloques" que tengan "entradas" y "salidas", como se aprecia en la figura 5.2.2.

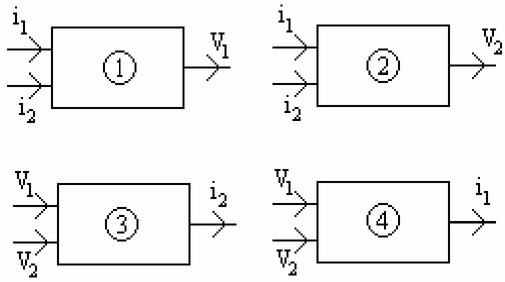


Figura 5.2.2. Representación del circuito como función (entradas y salidas).

En general uno de estos bloques representa una función, y las cantidades que entran como variables en la función se representan en sus terminales. A estas variables se les asignan muchas denominaciones, algunas de las cuales se observan en la figura 5.2.3.

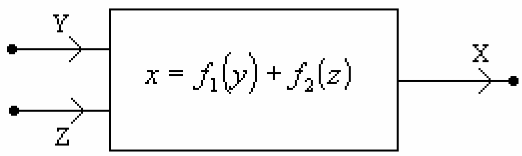


Figura 5.2.3. Representación del circuito como función (sistema).

Entradas → *Salida*
Estímulo → *Respuesta*
Variables independientes → *Variable dependiente*
Causa → *Efectos*

Claro que esta representación no es exclusiva de los sistemas lineales; en general cualquier sistema puede representarse así. En cuanto a las denominaciones que toman las variables, nótese que "variables independientes y dependientes "tienen un connotación matemática, y "estímulo y respuesta" una connotación física o fisiológica. Ambas connotaciones deben tratarse con cuidado.

177

5.3 LINEALIDAD Y SUPERPOSICIÓN.

Estos son conceptos iguales que significan lo mismo; sólo que linealidad es un concepto más "matemático", y superposición es más "físico". Generalmente se define la superposición por la condición: "la respuesta de un sistema lineal a varios estímulos es la suma de las respuestas a cada uno de los estímulos". Definición que queda aclarada utilizando la representación por bloques, como se muestra en la figura 5.3.1.

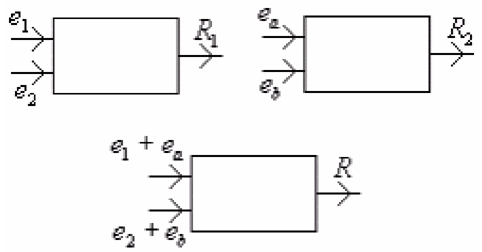


Figura 5.3.1. Linealidad y superposición.

R_1 ⟶ *respuesta a los estímulos e_1 y e_2*

$$R_1 = f_1(e_1) + f_2(e_2)$$

R_2 ⟶ *respuesta a los estímulos e_a y e_b*

$$R_2 = f_1(e_a) + f_2(e_b)$$

$$R = R_1 + R_2 = f_1(e_1 + e_2) + f_2(e_a + e_b)$$

$$R = f_1(e_1) + f_1(e_2) + f_2(e_a) + f_2(e_b)$$

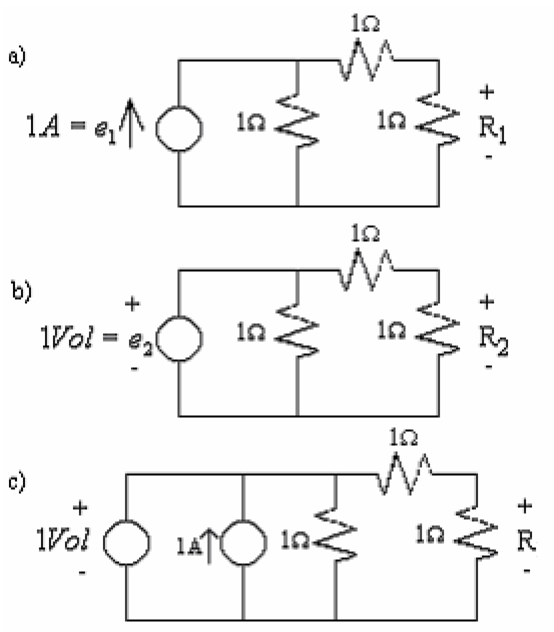


Figura 5.3.2. Estímulos de diferente tipo en la misma entrada.

$$V_{R_1} = \frac{(1A)\left(R_{equiv}\right)}{2\Omega}1\Omega$$

$$= \frac{1A}{2\Omega}\left(\frac{1*2}{1+2}\right)1\Omega = \frac{1}{3}v$$

$$V_{R_2} = \frac{1v*1\Omega}{2\Omega} = \frac{1}{2}v$$

$$V_R = \frac{1v}{2\Omega}1\Omega = \frac{1}{2}v$$

Claro que se requieren muchas más aclaraciones. Por ejemplo, los estímulos deben ser “sumables”, lo cual significa que sean del mismo tipo. En la figura 5.3.2 vemos un ejemplo de estímulos no “sumables”. En este caso los dos estímulos actuando simultáneamente, no producen una respuesta que equivalga a la misma respuesta a los estímulos individuales. ¡Y el circuito es lineal! Debemos, entonces, tener la precaución de considerar sólo estímulos del mismo tipo en cada una de las “entradas” del sistema. En cambio, en "entradas" distintas no hay problema que los estímulos sean diferentes en naturaleza. Veamos un ejemplo en la figura 5.3.3.

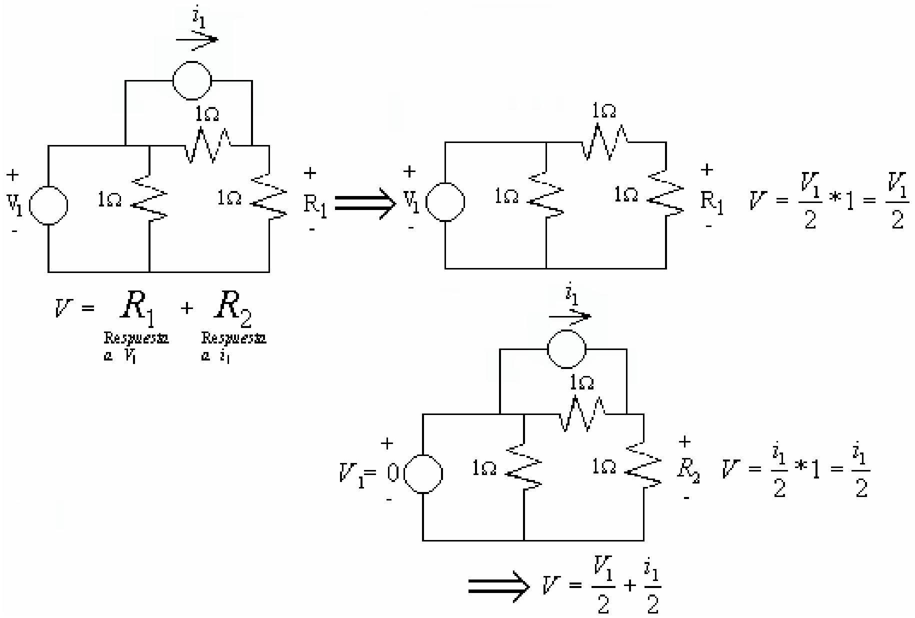


Figura 5.3.3. Estímulos de diferente tipo en diferentes entradas.

Otra solución la vemos en la figura 5.3.4

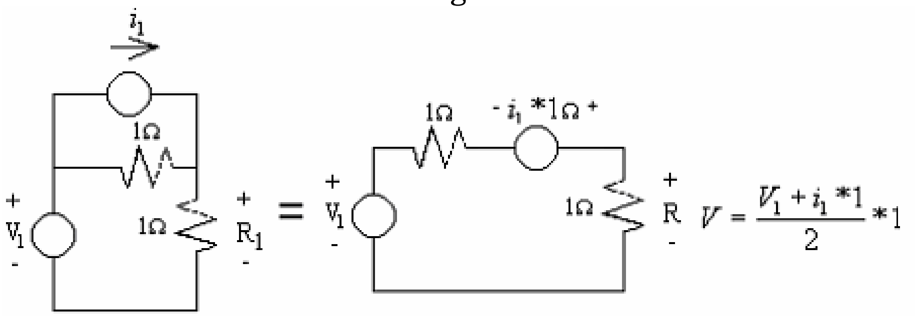


Figura 5.3.4. Solución a los dos estímulos.

La primera solución la obtuvimos por "superposición"; usando sólo una fuente a la vez. La segunda, por "transformación" de elementos en paralelo.

Para terminar esta breve reseña de la superposición en circuitos, consideremos el caso en el cual el estímulo y la respuesta se presentan en los mismos terminales, y el caso en el cual se presentan en diferentes terminales. En el primer caso, tendremos "circuitos de un par de terminales" (Figura 5.3.5). Podemos considerar como "estímulos" las fuentes internas y una de las cantidades *v* ó *i*, y como respuesta la otra cantidad *v* ó *i*:

$$v\ (respuesta) = f_z(\ i\ estímulo\ ) + f\ (\ fuentes\ internas\ )$$
$$i\ \ (respuesta) = f_y\ (\ v\ estímulo\ ) + f\ (\ fuentes\ internas)$$

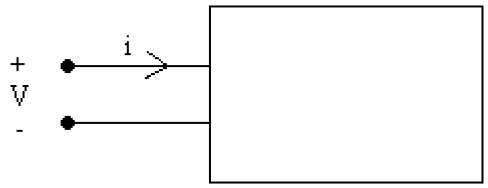


Figura 5.3.5. Linealidad y superposición. (Circuito de 1 par de terminales)

En el segundo caso tendremos circuitos de dos ó más pares de terminales (Figura 5.3.6). Estos circuitos merecen un tratamiento especial, que desarrollaremos en un capítulo aparte.

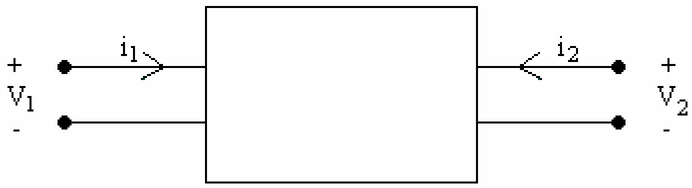


Figura 5.3.6. Linealidad y superposición. (Circuito de 2 pares de terminales)

Volviendo al caso de los circuitos de un par de terminales, obsérvese que una de las cantidades, *v* ó *i*, en el par de terminales, se debe considerar como un estímulo, o variable independiente, pues es evidente que en esos terminales se puede colocar una fuente de v ó una fuente de *i*, lo cual puede cambiar el voltaje o la corriente en los mismos terminales. En resumen queremos establecer que el voltaje y la corriente en los terminales no depende solamente de las fuentes internas, sino también de lo que se conecte en los terminales. Lo anterior se ilustra en la figura 5.3.7.

El voltaje en bornes con la fuente de corriente será:

$$v = V_1 + I_1 R$$

Si cambiamos la fuente de corriente por una resistencia, tendremos:

$$v = V_1 + iR$$

$$v = -iR_1$$

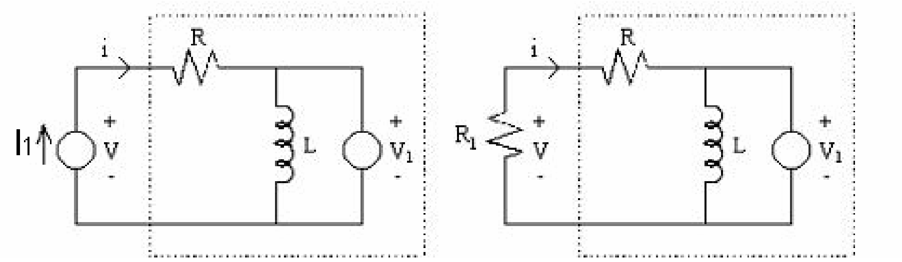


Figura 5.3.7. Linealidad y superposición, y su dependencia de los elementos externos.

Vemos, entonces, como v depende del elemento conectado en los terminales. Pero es de anotar que la ecuación que define el voltaje en bornes se puede seguir escribiendo de la misma forma, no importa lo que esté conectado en los terminales, siempre y cuando se incluya la corriente como variable independiente, ó como estimulo. Para el circuito anterior esta ecuación será: $v = i\,R + V_1$

5.4 TEOREMAS DE SUSTITUCIÓN

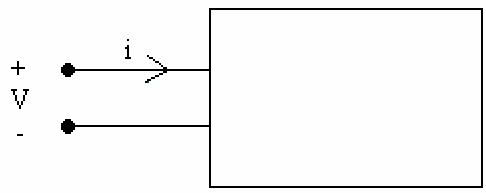


Figura 5.4.1. Teoremas de sustitución.

Los circuitos de dos pares de terminales se pueden sustituir por otros equivalentes más sencillos ó más prácticos, mediante una serie de teoremas que tienen como base común la posibilidad de escribir las ecuaciones:

$$v\ (respuesta) = f_z(\ i\ estímulo\ ) + f_z\ (\ fuentes\ internas\ )$$
$$i\ (respuesta) = f_y\ (\ v\ estímulo\ ) + f_y\ (\ fuentes\ internas)$$

Ecuaciones que podemos tomar como definiciones de los circuitos lineales. Es decir todo circuito de dos pares de terminales lineal cumple necesariamente estas ecuaciones.

Veamos estos teoremas:

5.4.1 TEOREMA DEL SECCIONAMIENTO.

Un circuito se puede seccionar cuando está unido por dos terminales, en dos circuitos, reemplazando cada parte por una fuente de voltaje - corriente, cuyos valores correspondan al voltaje y a la corriente en los terminales del circuito original. (Figura 5.4.1.1).

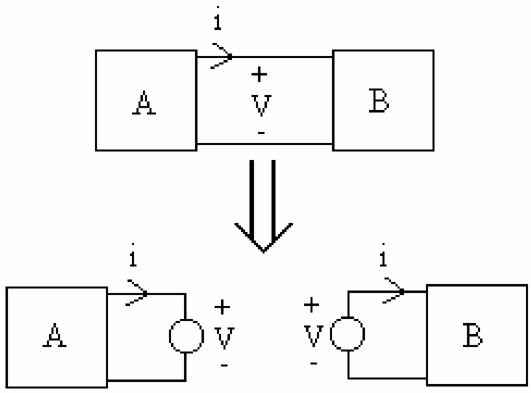
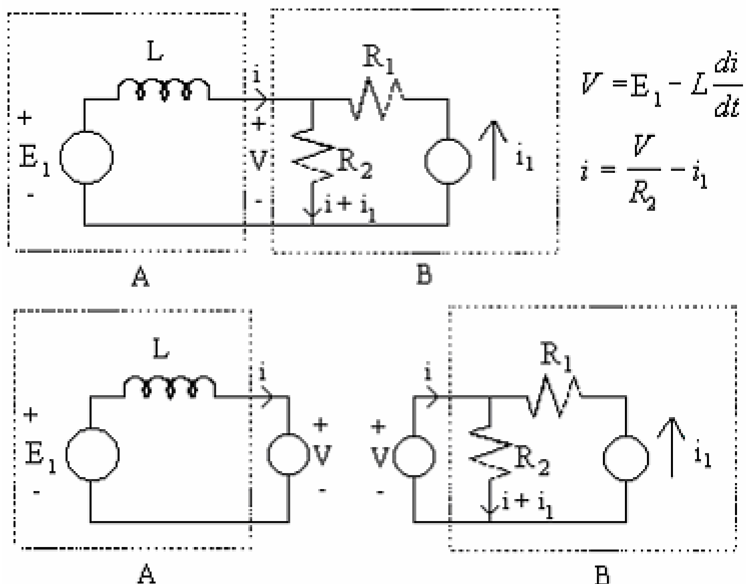


Figura 5.4.1.1. Teorema del seccionamiento.



$$V = E_1 - L\frac{di}{dt}$$
$$i = \frac{V}{R_2} - i_1$$

Figura 5.4.1.2. Teorema del seccionamiento.

DEMOSTRACIÓN

Vimos que la ecuación del voltaje en dos terminales se puede considerar, si se acepta la linealidad, como la suma de las respuestas a las fuentes internas del circuito **A** y a la fuente de corriente **i** (considerada como estimulo):

$$v = f(i) + f(\textit{fuentes de } A)$$

Para el circuito **B** podemos decir lo mismo respecto a la corriente:

$$i = f(v) + f(\textit{fuentes de } B)$$

Efectuando el seccionamiento se obtienen las mismas ecuaciones:

$$v = f_A(\, i_{\textit{respuesta estímulo}}) + f_A\,(\textit{fuentes internas de } A)$$

$$i\,(\textit{respuesta}) = f_B(\, V_{\textit{estímulo}}) + f_B\,(\textit{fuentes internas de } B)$$

Ecuaciones que darían los mismos resultados, afirmando la posibilidad del seccionamiento. Ejemplo figura 5.4.1.2.

5.4.2 TEOREMA DE LA SUSTITUCIÓN

Es un caso particular del anterior. Se presenta cuando v y/o i son valores conocidos. En este caso se suele decir erróneamente que "un voltaje ó corriente conocidos se pueden reemplazar por una fuente de voltaje ó corriente del mismo valor". Ilustremos el problema de tomar en serio esa propuesta común a la mayoría de textos de circuitos.

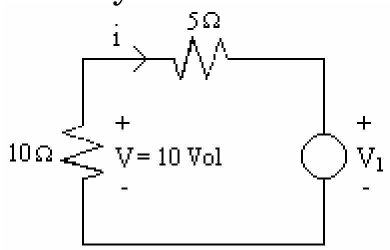


Figura 5.4.2.1. Teorema de la sustitución.

El circuito de la figura 5.4.2.1, se puede solucionar así:

$$i = \frac{-v}{10\Omega} = -\frac{10voltios}{10\Omega} = -1A$$

$$V_1 = 10v - i * 5\Omega = 10 - (-1A) * 5\Omega = 15voltios$$

Pero si reemplazamos el voltaje conocido por una fuente de 10 voltios (Figura 5.4.2.2), el circuito queda sin solución posible.

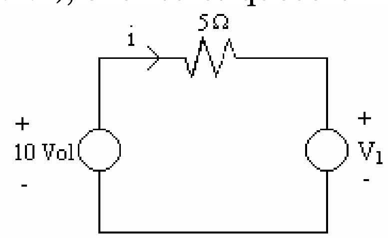


Figura 5.4.2.2. Teorema de la sustitución.

Recomendamos, entonces, aplicar mejor el teorema del seccionamiento en lugar del teorema de la sustitución.

5.5 TEOREMAS DE THÉVENIN Y NORTON

Estos teoremas son consecuencias directas del teorema del seccionamiento y la superposición. En efecto, hemos visto que todo circuito se puede "cortar" por dos terminales, siempre y cuando se mantengan el voltaje y la corriente iguales en los terminales separados. Ahora si el voltaje en una de las partes separadas (la A supongamos), se puede expresar:

$$v = f_A(i_{\text{respuesta estímulo}}) + f_A(\textit{fuentes internas de A}) \quad (\textit{superposición})$$

Resulta que el circuito A, de la figura 5.5.1, se puede expresar por:

i) El voltaje en los bornes de A cuando i = 0 :

$$v_{\text{en A con } i=0} = f_A(\textit{ fuentes internas de A})$$

ii) El voltaje producido por i cuando se anulan todas las fuentes internas en A :

$$v_{\text{producido por } i} = f_A(i)$$

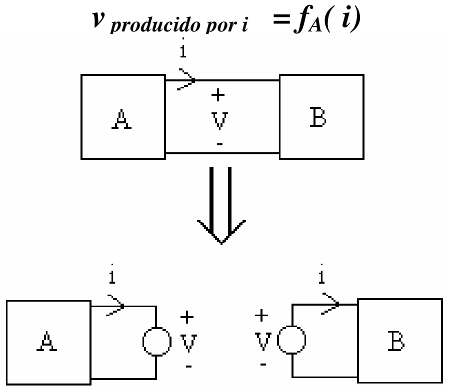


Figura 5.5.1. Teoremas de Thevenin y Norton.

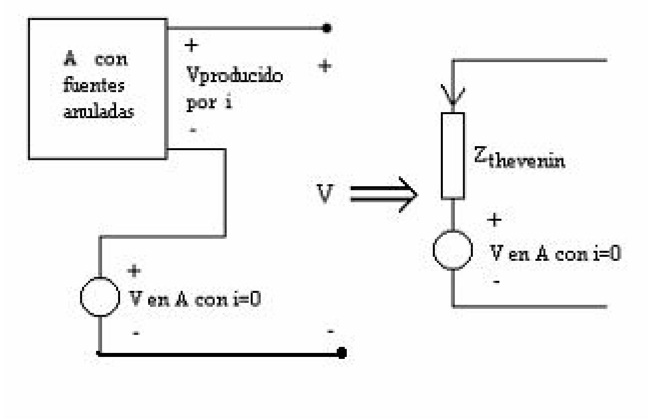


Figura 5.5.2. Teoremas de Thevenin y Norton.

La representación simbólica de esos voltajes está dada en la figura 5.5.2.

El circuito A con sus fuentes anuladas se conoce como la $Z_{thevenin}$ del circuito (Figura 5.5.3) (impedancia de Thévenin), y el voltaje en bornes con los terminales abiertos $(i = 0)$ se conoce como el voltaje de Thévenin.

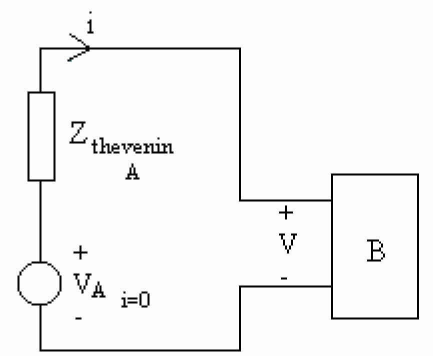


Figura 5.5.3. Teorema de Thevenin.

Una vez representado A por la fuente y la $Z_{thevenin}$ lo volvemos a unir al circuito B. Como este proceso no perturba en absoluto al circuito B, se dice: "toda porción de un circuito, unida al resto por dos terminales, se puede representar, o sustituir, por un circuito formado por una fuente de voltaje igual al voltaje cuando los dos terminales se encuentran abiertos, en serie con una impedancia igual a la de la porción del circuito con sus fuentes internas anuladas".

Este teorema de Thévenin tiene una importancia tal en circuitos que debe tenerse un cuidado especial con su aprendizaje.

El teorema de Norton es equivalente al de Thévenin, cuando se invierten los papeles del voltaje y de la corriente (cuando se hacen estos cambios de papeles, se dice que se aplica la "dualidad"). Si tomamos la corriente como "respuesta", podremos escribir:

$$i = f_A(v) + f_A(\textit{fuentes internas de A})$$

Ecuación que nos permite representar al circuito A por:

i. La corriente producida por un v cuando se anulan las fuentes internas en A, y
ii. La corriente producida por las fuentes de A cuando v = 0 (ó sea cuando hacemos un cortocircuito en los terminales de A). La representación simbólica de lo anterior se da en la figura 5.5.4.

Ahora, si unimos está representación a B, tendremos el circuito mostrado en la figura 5.5.5

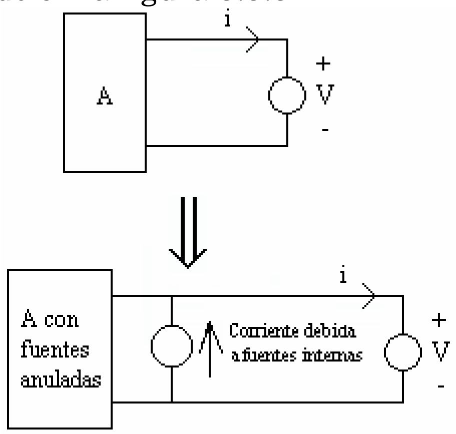


Figura 5.5.4. Teorema de Norton.

El proceso anterior se enuncia así: "toda porción de un circuito unida al resto por dos terminales, se puede representar, ó sustituir por una fuente de corriente de valor igual a la que circula cuando esos terminales se colocan en cortocircuito (corriente por los mismos terminales), en paralelo con una impedancia, la impedancia de Norton, cuyo valor es la impedancia en los terminales con todas las fuentes de la porción del circuito anuladas".

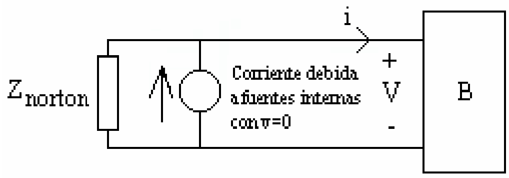


Figura 5.5.5. Teorema de Norton.

Resulta necesario advertir también la importancia enorme de este teorema.

5.5.1 EJEMPLO DEL TEOREMA DE THÉVENIN Y DEL TEOREMA DE NORTON.

5.5.1.1 PARA THÉVENIN:

Ver figura 5.5.1.1.1

i. Voltaje en terminales abiertos: Ver figura 5.5.1.1.2

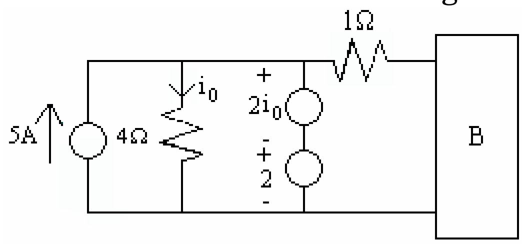


Figura 5.5.1.1.1 Ejemplo del teorema de Thevenin.

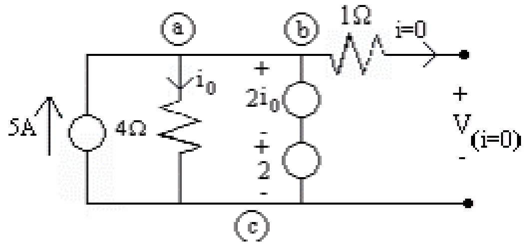


Figura 5.5.1.1.2 Ejemplo del teorema de Thevenin.

$$V_{ac} = V_{bc}$$
$$4i_O = 2i_O + 2$$
$$\therefore i_O = 1$$
$$V_{(i=0)} = 2i_O + 2$$
$$= 2*1+2$$
$$V_{i=0} = 4$$

Este será el voltaje de Thévenin.

ii. Voltaje con fuentes anuladas: Ver figura 5.5.1.1.3., caso a.

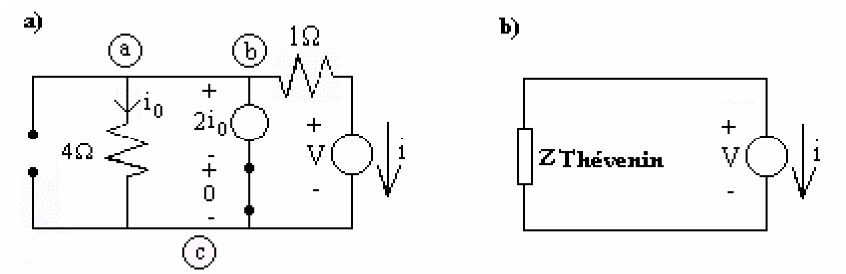


Figura 5.5.1.1.3 Ejemplo del teorema de Thevenin.

Nótese que el elemento cuyo voltaje es $2\,i_0$ (fuente de voltaje controlada) en realidad no es una fuente verdadera pues su voltaje no es un ***valor dado*** o ***independiente del circuito***, por eso no se debe anular.

$$v = 0 + 2i_o - 1*i$$
$$V_{ac} = V_{bc}$$
$$4i_O = 2i_O$$
$$\therefore i_O = 0$$
$$\therefore v = -i$$
$$\therefore Z_{Thevenin} = \frac{v}{-i} = \frac{-i}{-i} = 1\Omega$$

La $Z_{thevenin}$ es R = 1Ω. Obsérvese que el signo menos (-) sólo se debe al sentido de i y la polaridad de v. Como se aprecia en el circuito de la figura 5.5.1.1.3, caso b.

El equivalente de Thévenin se muestra en la figura 5.5.1.1.4.

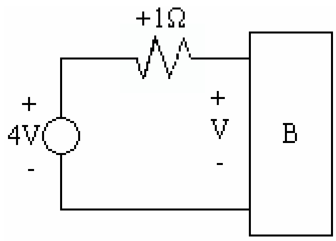


Figura 5.5.1.1.4 Ejemplo del teorema de Thevenin.

5.5.1.2 PARA NORTON:

i. Corriente en corto circuito: Ver figura 5.5.1.2.1

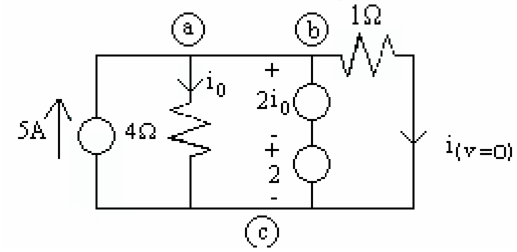


Figura 5.5.1.2.1 Ejemplo del teorema de Norton.

$$
\begin{aligned}
&V_{ac} = V_{bc} \\
&4i_o = 2i_o + 2 \\
&\therefore i_o = 1 \\
&\therefore i_{(v=0)} = \frac{2\,i_0 + 2}{1\Omega} \\
&i_{v=0} * 1 = 2i_o + 2 = 4 \\
&\therefore i_{(v=0)} = 4
\end{aligned}
$$

ii. Corriente con fuentes anuladas: (Debida a v), como se observa en la figura 5.5.1.2.2.

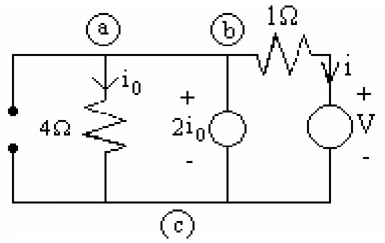


Figura 5.5.1.2.2 Ejemplo del teorema de Norton.

Recuérdese que "fuente" es un elemento con voltaje ***conocido, dato***, ó ***de valor independiente*** del circuito.

$$V_{ac} = V_{bc}$$

$$4i_o = 2i_o$$

$$i_o = 0$$

$$\therefore i = -v$$

$$Z_{Norton} = \frac{v}{-i} = 1\Omega$$

Lo que corresponde a una Z = 1Ω. (Figura 5.5.1.2.3)

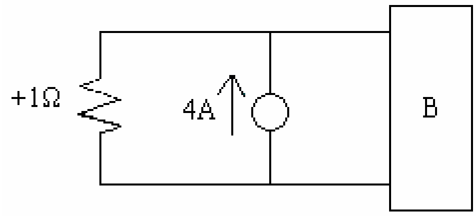


Figura 5.5.1.2.3 Ejemplo del teorema de Norton.

5.5.2 VEAMOS OTRO EJEMPLO EN LA FIGURA 5.5.2.1.

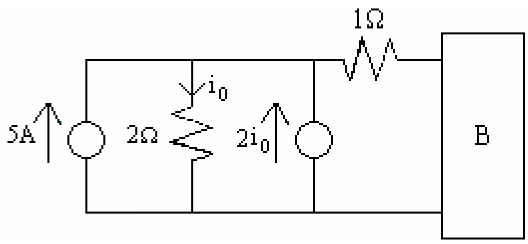


Figura 5.5.1.2.1 Ejemplo del teorema de Thevenin y Norton.

5.5.2.1 EQUIVALENTE DE THEVENIN:

i. Voltaje en circuito abierto: ver figura 5.5.2.1.1

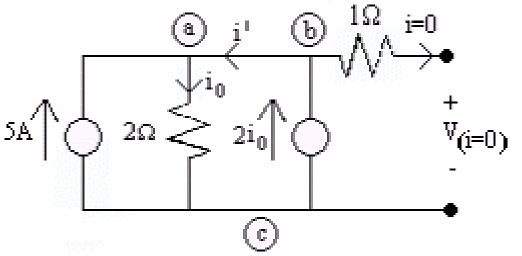


Figura 5.5.2.1.1 Ejemplo del teorema de Thevenin.

$$\sum i_{(b)} = 0 \quad \rightarrow \quad -i' + 2i_o - i = 0 \quad \rightarrow \quad i' = 2i_o$$
$$\sum i_a = 0 \quad \rightarrow \quad 5 - i_o + i' = 0$$
$$5 - i_o + 2i_o = 0 \quad \rightarrow \quad i_o = -5$$
$$V_{i=0} = V_{ac} = 2i_o = 2*(-5) = -10 voltios$$

ii. Voltaje producido por i con fuentes anuladas, como se puede apreciaren la figura 5.5.2.1.2

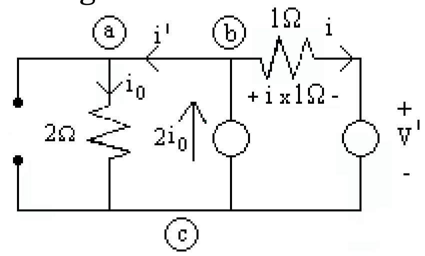


Figura 5.5.2.1.2 Ejemplo del teorema de Thevenin.

$$\sum i_a = 0 \quad \rightarrow \quad i' = i_o$$
$$\sum i_b = 0 \quad \rightarrow \quad 2i_o - i' - i = 0 \quad \rightarrow \quad 2i_o - i_o - i = 0$$
$$\therefore i_o = i$$
$$V_{ac} = V_{bc} \quad \rightarrow \quad 2i_o = i + v'$$
$$\therefore v' = 2i_o - i = 2i - i = i$$

Esto equivale a una $Z_{Thévenin}$ =-1Ω, debido a la polaridad de *v´* y al sentido de *i* (Figura 5.5.2.1.2). En la figura 5.5.2.1.3 se muestra el equivalente de Thévenin final.

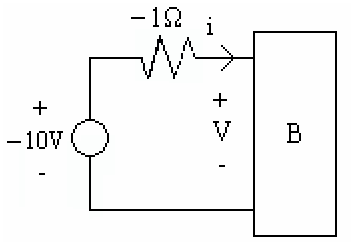


Figura 5.5.2.1.3 Ejemplos del teorema de Thevenin.

5.5.2.2 EQUIVALENTE DE NORTON.

i. Corriente con terminales en corto: Figura 5.5.2.2.1.

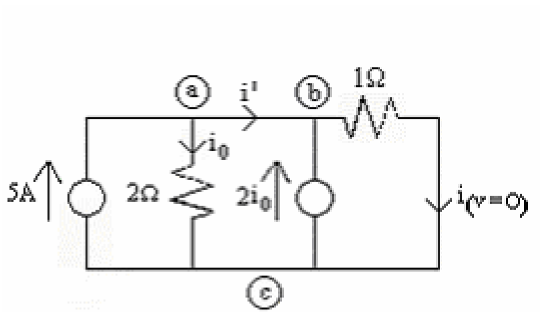


Figura 5.5.2.2.1 Ejemplos del teorema de Norton.

$$\sum i_a = 0 \quad \rightarrow \quad 5 - i_o - i' = 0 \quad \rightarrow \quad i' = 5 - i_0$$
$$\sum i_b = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,i_o + i' - i = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,i_o + i' = i$$
$$\therefore i = 5 - i_o + 2\,i_o = 5 + i_o$$

Pero:

$$V_{ac} = V_{bc} \quad \rightarrow \quad 2\,i_o = i * 1$$
$$\therefore i = 5 + \frac{i}{2} \qquad 2\,i = 10 + i$$
$$\therefore i = 10 \; Amperios$$

ii. Corriente debida a *v* con fuentes anuladas :Figura 5.5.2.2.2

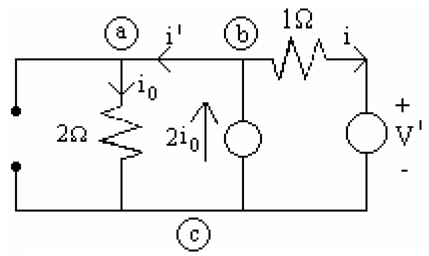


Figura 5.5.2.2.2 Ejemplos del teorema de Norton.

$$\sum i_a = 0 \quad \rightarrow \quad i' = i_o$$
$$\sum i_b = 0 \quad \rightarrow \quad 2i_o = i' + i = i_o + i \quad \rightarrow \quad i_o = i$$
$$V_{ac} = V_{bc} \quad \rightarrow \quad 2i_o = i + v'$$
$$\therefore v' = 2i_o - i = 2i - i = i$$

Lo cual significa que la $Z_{\text{Thévenin}}$ es -1Ω

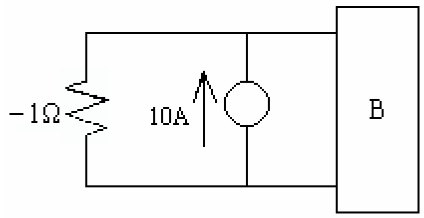


Figura 5.5.2.2.3 Ejemplos del teorema de Norton.

5.6 TEOREMAS GENERALIZADOS DE THEVENIN Y NORTON.

Los teoremas que vimos en el numeral anterior implican que los circuitos A y B sólo se interconectan por dos terminales. O sea que ninguno de los dos puede tener fuentes controladas que dependan de cantidades del otro circuito. Ahora trataremos circuitos cuya interconexión es más general. El circuito A, mostrado en la figura 5.6.1, no sólo está conectado a otros circuitos, sino que puede contener fuentes controladas por cantidades de esos circuitos. Aplicamos el principio de superposición, como se aprecia en la figura 5.6.1.

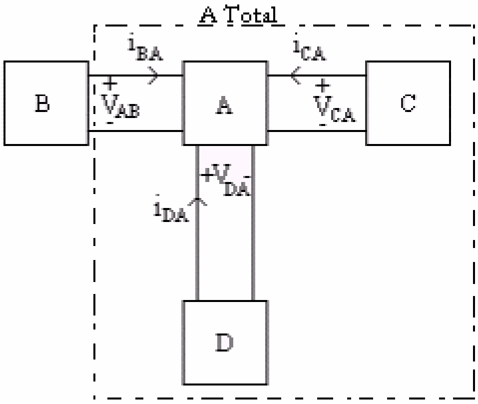


Figura 5.6.1 Teoremas generalizados de Thevenin y Norton.

$$V_{AB} = f(I_{AB}) + f\begin{pmatrix} fuentes \quad en \quad A \\ no \quad controladas \\ externamente \quad a \quad A \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} fuentes\ en\ A\ controladas \\ externamente \\ a\ A\ incluidas\ V_{CA}\ \ y\ V_{DA} \end{pmatrix}$$

Y siguiendo exactamente los mismos delineamientos del numeral anterior, llegamos a la representación de la figura 5.6.2.

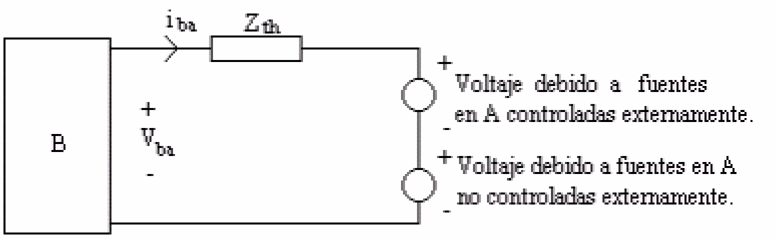


Figura 5.6.2 Teoremas generalizados de Thevenin y Norton.

Lo mismo puede hacerse para los circuitos C y D. Los circuitos del tipo **A** se llaman “circuitos con múltiples pares de terminales”; siendo su caso más importante el de los circuitos con dos pares de terminales.
Debe tenerse cuidado con los circuitos **C** y **D**. Pueden considerasen como partes de **A** y ser incluidos en un $\mathbf{A}_{Total}$ (parte encerrada en el rectángulo punteado); pero también pueden ser considerados como externos, en cuyo caso los voltajes $V_{CA}\ y\, V_{DA}$ deben considerarse como fuentes de

voltajes controladas externamente. Precisamente, se incluyen estos circuitos para ilustrar esas fuentes.

Para el teorema generalizado de Norton, bastará usar la ecuación de corriente como función de voltajes y fuentes, para hallar el equivalente.

Esta breve reseña será ampliada cuando estudiaremos los circuitos de dos pares de terminales.

5.7 EJEMPLOS.

5.7.1.1 EJEMPLO 1

Usando el equivalente de Thévenin, resolver el con R1=160 R2=160 L1= 1.5H L2=0.5H E1=360cos(30t) I1=sen(30t)

SOLUCIÓN:

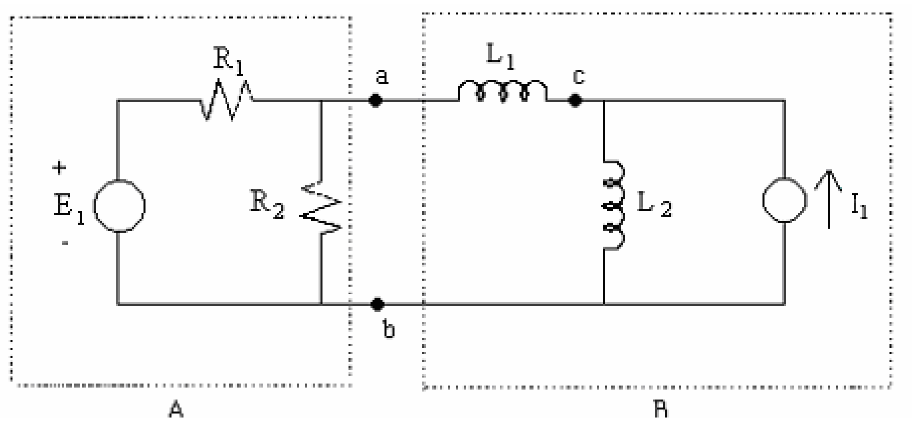


Figura 5.7.1.1 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

Hallemos el equivalente de Thévenin para los circuitos A y B entre los nodos a y b, del circuito de la figura 5.7.1.1

Para el circuito A:

i. Voltaje en circuito abierto : (ver figura 5.7.1.2)

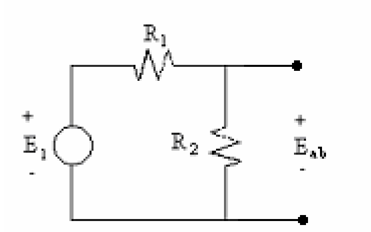


Figura 5.7.1.2 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$E_{ab} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) E_1 \qquad \text{(divisor de voltaje).}$$

Como $R_1 = R_2$,

$$E_{ab} = \frac{E_1}{2}$$

ii. Impedancia de Thévenin : (ver figura 5.7.1.3)

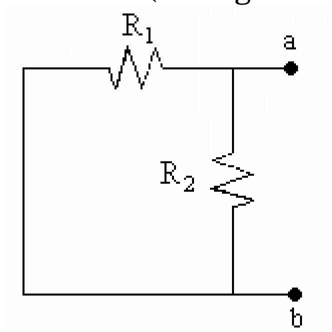


Figura 5.7.1.3 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$Z_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_3 \text{ , dos resistencias en paralelo.}$$

$$\text{Como} \quad R_1 = R_2 \quad \rightarrow R_3 = \frac{R_1}{2}$$

Para el circuito B :

i. El voltaje en circuito abierto E_{ab2}, es el voltaje en L_2, ver figura 5.7.1.4.

$$E_{ab_2} = (L_2 D) I_1 = L_2 \frac{d}{dt} I_1$$

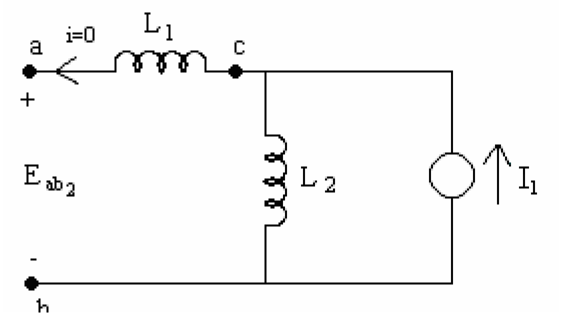


Figura 5.7.1.4 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

ii. Impedancias Thévenin de dos bobinas en serie, ver figura 5.7.1.5.

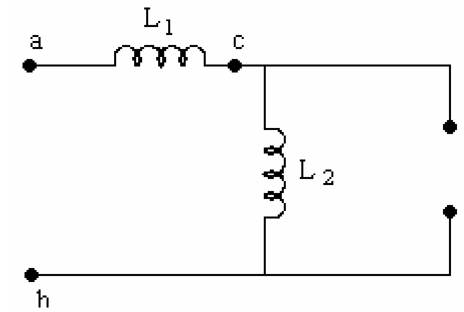


Figura 5.7.1.5 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$Z_{th} = \left(L_1 + L_2\right)D$$

El circuito equivalente es el mostrado en la figura 5.7.1.6.

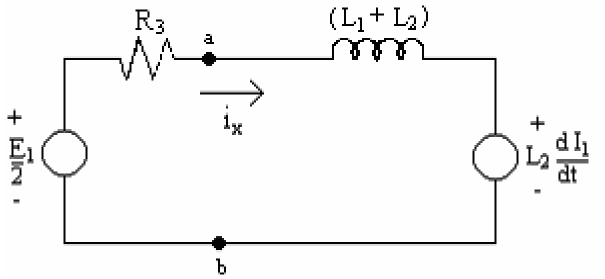


Figura 5.7.1.6 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

Ley de voltajes de Kirchhoff :

$$\frac{E_1}{2} - R_3 i_x - (L_1 + L_2)\frac{di_x}{dt} - L_2\frac{dI_1}{dt} = 0$$

$$\frac{di_x}{dt} + \frac{R_3}{L_1 + L_2} i_x = \frac{E_1}{2(L_1 + L_2)} - \frac{L_2}{(L_1 + L_2)}\frac{dI_1}{dt}$$

Con los datos:

$$\frac{di_x}{dt} + 40 i_x = 90\cos(30t) - 0.5\frac{d}{dt}\mathrm{sen}(30t)$$

$$\frac{di_x}{dt} + 40 i_x = 75\cos(30t)$$

5.7.1.2 EJEMPLO 2

Usando el equivalente de Norton,

$$L_1 = 2H; \qquad L_2 = 1H; \qquad L_3 = 1H$$

$$E = 100\cos(t); \qquad I = 10\,\mathrm{sen}(t)$$

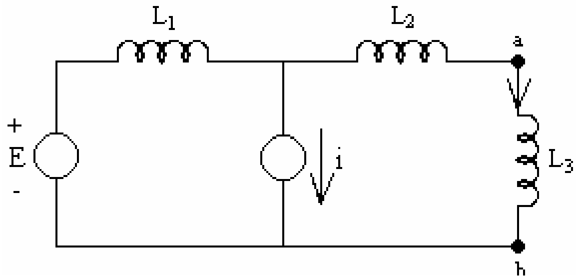


Figura 5.7.2.1 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

La corriente de cortocircuito por a-b, en la figura 5.7.2.1, es mostrada en la figura 5.7.2.2

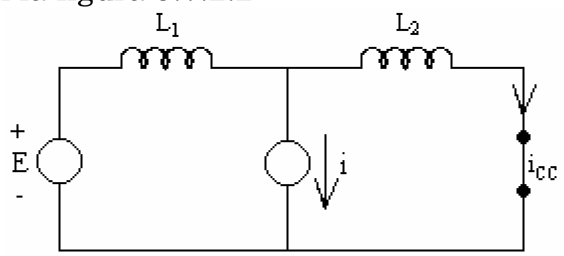


Figura 5.7.2.2 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

Empleando superposición: Primero, actuando la fuente de voltaje, hallamos I_{CC1}, ver figura 5.7.2.3

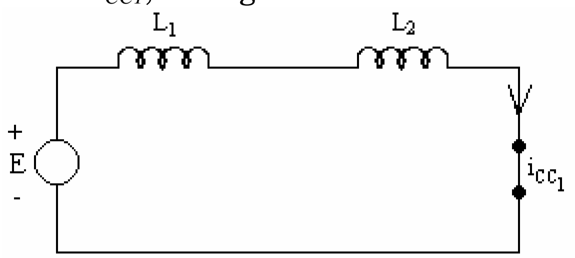


Figura 5.7.2.3 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$E = Z_{eq} I_{CC_1}$$

$$E = (L_1 D + L_2 D) I_{CC_1}$$

$$E = (2D + D) I_{CC_1}$$

$$E = 3D I_{CC_1}$$

$$I_{CC_1} = \frac{1}{3D} E = \frac{1}{3} \int_0^t E dt$$

$$I_{CC_1} = \frac{1}{3} \int_0^t 100 \cos(t) dt = \frac{100}{3} sen(t)$$

Luego, actuando la fuente de corriente, hallamos I_{CC2}, ver figura 5.7.2.4

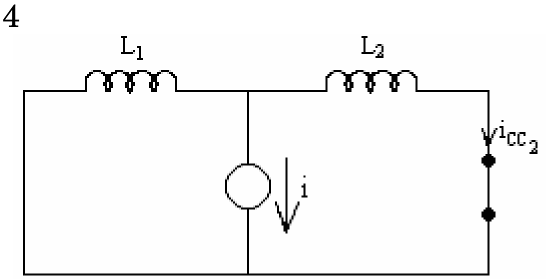


Figura 5.7.2.4 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

Por divisor de corriente:

$$I_{CC_2} = -\left[\frac{L_1 D}{L_1 D + L_2 D}\right] I$$

$$I_{CC\,2} = \left(-\frac{L_1}{L_1 + L_2}\right) I = -\frac{2}{2+1}(10\,\mathrm{sen}(t))$$

$$I_{CC_2} = -\frac{20}{3}\mathrm{sen}(t)$$

Por superposición:

$$I_{CC} = I_{CC_1} + I_{CC_2}$$

$$I_{CC} = \frac{80}{3} sen(t) \quad Amperios$$

Impedancia de Norton: ver figura 5.7.2.5.

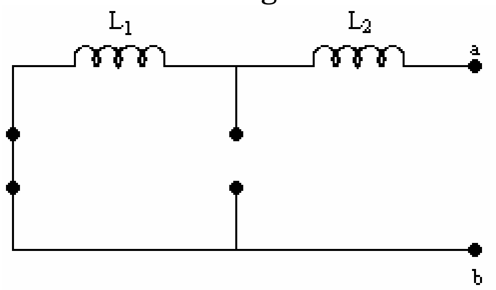


Figura 5.7.2.5 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

$$Z_n = (L_1 + L_2)D$$

El circuito queda como el de la figura 5.7.2.6.

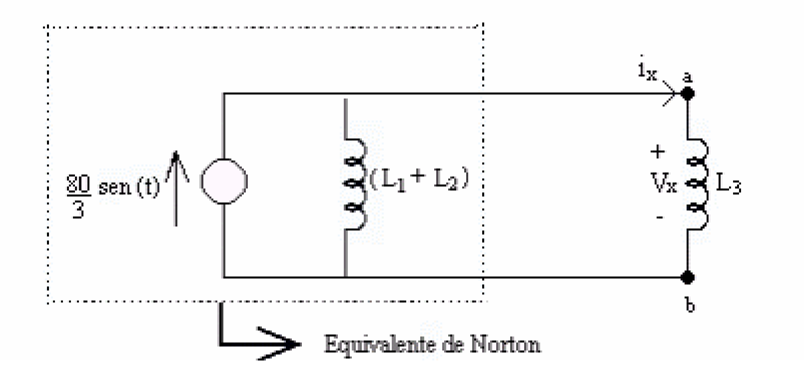


Figura 5.7.2.6 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

Por divisor de corriente:

$$i_x = \left(\frac{(L_1 + L_2)D}{(L_1 + L_2)D + L_3 D} \right) \left(\frac{80}{3} sen(t) \right)$$

$$i_x = \left(\frac{L_1 + L_2}{L_1 + L_2 + L_3} \right) \left(\frac{80}{3} sen(t) \right)$$

$$i_x = 20 sen(t)$$

$$V = L_3 \frac{di_x}{dt} = 1 \frac{d}{dt} (20 sen(t))$$

$$V_x = 20 \cos(t) \quad voltios$$

5.7.1.3 EJEMPLO 3

Resolver para i, sabiendo que i (0) = - i, en la figura 5.7.3.1.

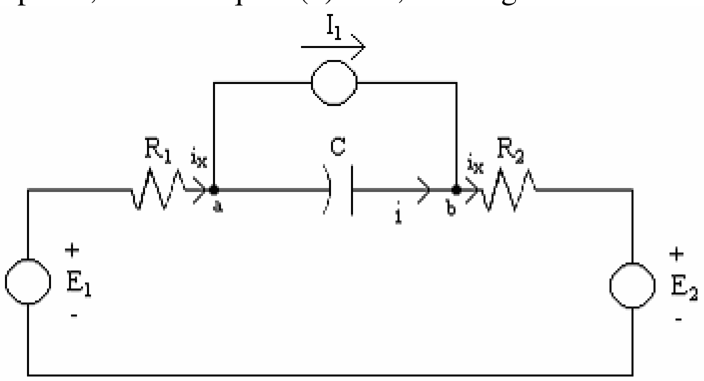


Figura 5.7.3.1 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$I_1 = \cos(10t)$$
$$E_1 = 40 voltios$$
$$E_2 = 10\cos(10t)$$
$$R_1 = R_2 = 500k\Omega$$
$$C = 0.5\mu F$$

SOLUCIÓN
Hallemos el equivalente de Norton en a-b.

i. Fuente de Norton: ver figura 5.7.3.2.

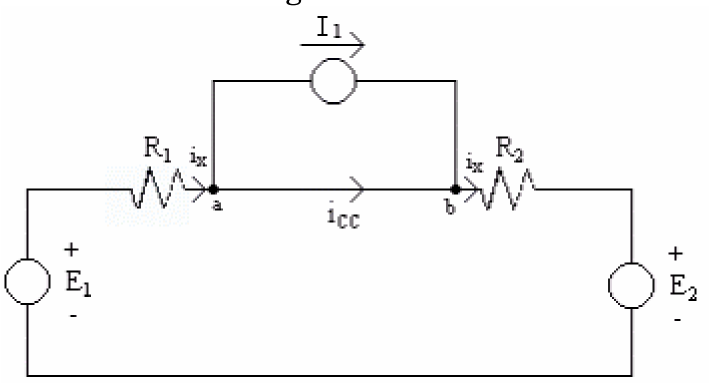


Figura 5.7.3.2 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$E_1 - R_1 i_x - R_2 i_x - E_2 = 0$$
$$i_x = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

En el nodo a, se cumple que:

$$i_x = i_{CC} + I_1$$
$$i_{CC} = i_x - I_1$$
$$i_{CC} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} - I_1$$

Impedancia de Norton (ver figura 5.7.3.3)

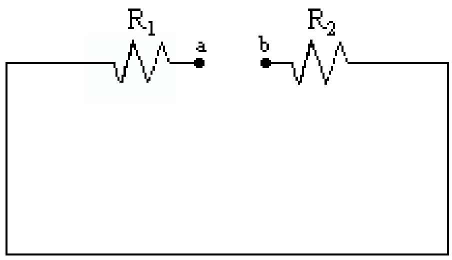


Figura 5.7.3.3 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

$$Z_n = R_1 + R_2$$

El circuito original puede reemplazarse por el circuito de la figura 5.7.3.4.

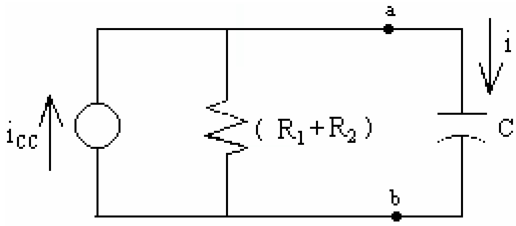


Figura 5.7.3.4 Ejemplos del teorema de Thevenin y Norton.

Divisor de corriente b:

$$i = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{CD}} \right) i_{CC}$$

$$\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{CD} \right) i = (R_1 + R_2) i_{CC}$$

$$\left(1 + \frac{1}{(R_1 + R_2)CD} \right) i = i_{CC}$$

$$i + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \int_0^t i dt = i_{CC}$$

Derivando con respecto a t.

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{(R_1+R_2)C}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t idt\right]=\frac{d}{dt}i_{CC}$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{(2*500000)(0.5*10^{-6})}*\frac{d}{dt}\int_0^t idt=\frac{d}{dt}\left[\frac{40-10\cos(10t)}{2*500*10^3}-\cos(10t)\right]$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{5*10^5*10^{-6}}i=\frac{d}{dt}\left[\frac{40-10\cos(10t)}{10^6}-\cos(10t)\right]$$

$$\frac{di}{dt}+2i=\frac{d}{dt}\left[-10^{-5}\cos(10t)-\cos(10t)\right]=10^{-5}sen(10t)*10+10sen(10t)$$

$$\frac{di}{dt}+2i=\left[10+10^{-4}\right]sen(10t)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS: ver apéndice B.